Musterlösung Verständnisteil ITPDG

WS 03/04 Februar - Klausur

V1

Aufgabe 1 $\mathcal{F}[f(t)](\omega) = F(\omega)$, $\alpha > 0$

f ist eine Schwartzfunktion $\Rightarrow$ $f(\alpha t)$ ist ebenfalls eine Schwartzfunktion $\Rightarrow$ $\mathcal{F}[f(\alpha t)](\omega)$ existiert.

$$\mathcal{F}[f(\alpha t)](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha t)\, e^{-i\omega t}\, dt$$

Subst. $\alpha t = \tilde{t}$ $d\tilde{t} = \alpha\, dt$

$$= \underset{\substack{\uparrow \\ \alpha > 0 \,!}}{\int_{-\infty}^{+\infty}} f(\tilde{t})\, e^{-i\omega \frac{\tilde{t}}{\alpha}} \cdot \frac{d\tilde{t}}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tilde{t})\, e^{-i\frac{\omega}{\alpha}\tilde{t}}\, d\tilde{t}$$

$$= \frac{1}{\alpha}\, \mathcal{F}[f(\tilde{t})]\left(\frac{\omega}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha}\, F\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$$

Aufgabe 2

V2

$$Z[a_n] = 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}$$

$$1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} \overset{!}{=} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{1}{z^n} \Rightarrow a_0 = 1,\ a_1 = -1,\ a_2 = 1$$

$$a_k = 0 \quad k \geq 3$$

Aufgabe 3

Sei $h(t)$ die Impulsantwort, dann gilt

(1) $\boxed{i(t) = (u * h)(t)}$ Das ist auch für $i(t) = i_2(t)$

richtig: $i_2(t) = (u_2 * h)(t)$

$$\Rightarrow i_2(t) = \int_0^t \underbrace{u_2(t-\tau)}_{=2} h(\tau)\, d\tau = 2 \int_0^t h(\tau)\, d\tau$$

$$\Rightarrow \boxed{i_2'(t) = 2\, h(t)}$$

Mit (1) $\Rightarrow$ $i(t) = \left(u * \frac{i_2'}{2}\right)(t) = \frac{1}{2}\left(u * i_2'\right)(t)$

Aufgabe 4

V3

$$f(t) = \begin{cases} \cos(2t)\, e^{-5t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{F}[f(t)](\omega) = \mathcal{L}[f(t)](i\omega) = \frac{s+5}{(s+5)^2+4} \Big|_{s=i\omega}$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}[f(t)](\omega) = \frac{i\omega + 5}{(i\omega+5)^2 + 4}$$

Aufgabe 5

$$\mathcal{L}[g(t)(sf(0)+f'(0)) + (f'' * g)(t)](s) =$$

$$(sf(0)+f'(0))\,\mathcal{L}[g(t)](s) + \mathcal{L}[(f''*g)(t)](s) =$$

$$(sf(0)+f'(0))\,\mathcal{L}[g(t)](s) + \mathcal{L}[f''(t)](s) \cdot \mathcal{L}[g(t)](s) =$$

$$(sf(0)+f'(0))\,\mathcal{L}[g(t)](s) + \left(s^2\mathcal{L}[f(t)](s) - (sf(0)+f'(0))\right)\mathcal{L}[g(t)](s)$$

$$= s^2\,\mathcal{L}[f(t)](s)\,\mathcal{L}[g(t)](s)$$

Aufgabe 6

V4

$$\vec{y}\,'(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \vec{y}(x) + \begin{pmatrix} e^{4x} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{y}(0) = \vec{0}$$

$$\vec{y}_1(x) = e^{4x}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{3}e^{x} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \quad \vec{y}_1(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \checkmark$$

$$\vec{y}_1\,'(x) = e^{4x}\begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{3}e^{x} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \vec{y}_1(x) + \begin{pmatrix} e^{4x} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}e^{4x} - \frac{1}{3}e^{x} \\ e^{4x} - 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{4x} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{4}{3}e^{4x} - \frac{1}{3}e^{x} \\ e^{4x} \end{pmatrix} = \vec{y}_1\,'(x) \Rightarrow \vec{y}_1(x) \text{ löst das DGL-System!}$$

$$\vec{y}_2(x) = \begin{pmatrix} \cos(\ln(1+x^2)) \\ e^{x} - \cosh(2x) \end{pmatrix}, \quad \vec{y}_2(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \vec{y}_2(0) \neq \vec{0}$. d.h. $\vec{y}_2$ löst nicht das DGL-System!