

April – Klausur (Rechenteil)
Integraltransformationen und partielle
Differentialgleichungen

Name: Vorname:
Matr.-Nr.: Studiengang:

Ich **wünsche** den Aushang des Klausurergebnisses
unter Angabe meiner Matr.-Nr. (ohne Namen) am
Schwarzen Brett und im WWW. Unterschrift

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen ist nur die Laplacetabelle zugelassen. Taschenrechner und Formelsammlungen sind nicht zugelassen. Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Rechenaufgaben. Geben Sie immer den **vollständigen Rechenweg** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

Die Gesamtklausur ist mit 32 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 10 von 40 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	4	Σ

1. Aufgabe

8 Punkte

Lösen Sie mit Hilfe der Laplacetransformation das Anfangswertproblem

$$\vec{y}' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \vec{y} + \begin{pmatrix} \exp(t) \\ \exp(-t) \end{pmatrix}, \quad \vec{y}(0) = \vec{0}.$$

2. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben ist die partielle Differentialgleichung:

$$u_t = u_{xx} \text{ mit dem Anfangswert } u(x, 0) = e^{-|x|}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Berechnen Sie bezüglich x die Fourier-Transformierte von $u(x, t)$ d.h. $F(\omega, t) := F[u(x, t)](\omega)$. Untersuchen Sie $F(\omega, t)$ für $\omega = 0$ auf Stetigkeit.

Hinweis: $F[e^{-|x|}](\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}$.

3. Aufgabe

12 Punkte

Lösen Sie mittels Produktansatz das Randwertproblem (RWP) für die Potentialgleichung

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

auf dem Quadrat $Q = \{0 < x < \pi, 0 < y < \pi\}$ mit den Randwerten

$$u(0, y) = u(\pi, y) = 0, \quad u(x, 0) = \sin(2x), \quad u(x, \pi) = 0.$$

4. Aufgabe

10 Punkte

a) Zeigen Sie durch Anwendung des Differentiationsatzes für die Z -Transformation:

$$Z[n^2 a_n](z) = z \frac{d}{dz} Z[a_n](z) + z^2 \frac{d^2}{dz^2} Z[a_n](z).$$

b) Welche Folge b_n besitzt die Z -Transformierte

$$Z[b_n](z) = \frac{z}{(z+1)^2} - 2 \frac{z^2}{(z+1)^3} ?$$

Hinweis: Es gilt $\frac{d}{dz} \frac{z}{(z+1)} = \frac{1}{(z+1)^2}$ und $\frac{d^2}{dz^2} \frac{z}{(z+1)} = \frac{-2}{(z+1)^3}$.