Musterlösung April Klausur ITPDG (V1)

Verständnisteil

Aufgabe 1 $f(x) = 2\sin(x)\cos(5x)$

$$f(x) = 2\,\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\cdot\frac{e^{5ix}+e^{-5ix}}{2}$$

$$= \frac{e^{6ix}+e^{-4ix}-e^{4ix}-e^{-6ix}}{2i}$$

$$= \frac{e^{6ix}-e^{-6ix}}{2i} - \frac{e^{4ix}-e^{-4ix}}{2i} \Rightarrow$$

$$\boxed{f(x) = \sin(6x) - \sin(4x)} \quad \mathrm{I}$$

Die allgemeine Form der reellen Fourierreihe lautet:

$$s(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{k\,2\pi}{T}x\right) + b_k \sin\left(\frac{k\,2\pi}{T}x\right)$$

T ist die Periode von f

$$f(x+T) = 2\sin(x+T)\cos(5x+5T) \Rightarrow \boxed{T = 2\pi}$$

$$\Rightarrow s(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

Durch Vergleich mit I folgt:

$$a_k = 0,\ k = 0,1,2,\ldots \qquad b_k = \begin{cases} -1 & k = 4 \\ 1 & k = 6 \\ 0 & k \neq 4,6 \end{cases}$$

(V2)

Aufgabe 2

$$\mathcal{L}\left[\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\right](s) = \frac{1}{s^n} \quad , n = 1, 2, 3, \ldots \quad , \mathrm{Re}(s) > 0 \ldots$$

Damit die Laplace transf. ex.?

Ind. anfang: $n = 1$

$$\mathcal{L}\left[\frac{t^0}{0!}\right](s) = \mathcal{L}[1](s) = \frac{1}{s} = \frac{1}{s^n} \checkmark$$

Ind. schritt

IV: Für festes $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mathcal{L}\left[\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\right](s) = \frac{1}{s^k}$$

IBeh. Aus $\mathcal{L}\left[\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\right](s) = \frac{1}{s^k}$ folgt

$$\mathcal{L}\left[\frac{t^k}{k!}\right](s) = \frac{1}{s^{k+1}}$$

IBew. $\mathcal{L}\left[\frac{t^k}{k!}\right](s) = \mathcal{L}\left[\frac{t \cdot t^{k-1}}{(k-1)!\, k}\right](s)$

$$= \frac{1}{k}\,\mathcal{L}\left[t\,\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\right](s) = \frac{1}{k}\cdot\left(-\frac{d}{ds}\,\mathcal{L}\left[\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\right](s)\right)$$

$$\overset{IV}{=} \frac{1}{k}\left(-\frac{d}{ds}\,\frac{1}{s^k}\right) = \frac{1}{k}\,\frac{k}{s^{k+1}} = \frac{1}{s^{k+1}}$$

$\Rightarrow$ Die Beh. gilt für alle $n \geq 1$.

(V3)

<u>Aufgabe 3a)</u> $\mathcal{Z}[a_n](z) = F^*(z)$

$$\mathcal{Z}[\alpha a_n](z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha a_n \frac{1}{z^n} = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{1}{z^n} = \alpha F^*(z) \ldots$$

$$\mathcal{Z}[a_n + \alpha](z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + \alpha) \frac{1}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{1}{z^n} + \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n}$$

$$= F^*(z) + \frac{\alpha z}{z-1} \qquad (|z| > 1)$$

<u>Aufgabe 3b</u>

$\mathcal{Z}[\alpha a_n](z) = \alpha F^*(z) \Rightarrow \mathcal{Z}[\alpha a_n](z)$ Konvergiert für $|z| > r$ (genau wie $\mathcal{Z}[a_n](z) = F^*(z)$)

$$\mathcal{Z}[a_n + \alpha](z) = F^*(z) + \frac{\alpha z}{z-1}$$

$\Rightarrow \mathcal{Z}[a_n + \alpha](z)$ Konvergiert nur $|z| > \max(r, 1)$.

Aufgabe 4 $\quad y'' - \lambda y = 0, \quad y(0) = y(2) = 0$

V4

a) $\frac{9\pi^2}{4} = -\frac{k^2\pi^2}{4}$ das ist für kein $k \in \mathbb{Z}$ erfüllbar

$\Rightarrow y \equiv 0$ (nur triviale Lösung)

b) $y'' + 4\pi^2 y = 0 \Leftrightarrow y'' - (-4\pi^2) y = 0$

$-4\pi^2 = -\frac{k^2\pi^2}{4} \Leftrightarrow 16 = k^2 \Rightarrow k = \pm 4$

$\Rightarrow$ ~~Es~~ ex nichttriviale Lösungen

c) $y'' + 7\pi^2 y = 0 \Leftrightarrow y'' - (-7\pi^2) y = 0$

$-7\pi^2 = -\frac{k^2\pi^2}{4} \Leftrightarrow 28 = k^2 \Rightarrow k = \pm\sqrt{28} \notin \mathbb{Z}$

$\Rightarrow y \equiv 0$ (nur triviale Lösung)

Aufgabe 5

$F[f' * g](\omega) = F[f'](\omega) \cdot F[g](\omega)$

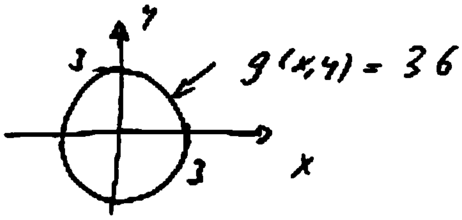
$= i\omega F[f](\omega) \cdot F[g](\omega) = F[f](\omega) \cdot i\omega F[g](\omega)$

$\uparrow$
Ableitungssatz

$= F[f](\omega) \cdot F[g'](\omega) = F[f * g'](\omega)$

Aufgabe 6 $u_{xx} + u_{yy} = 0$ (V5)

$K = \{ (x,y) \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 < 9 \}$



$a(x,y) = 4(x^2+y^2)$ Für $(x,y) \in \partial K = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 9 \}$

gilt $a(x,y) = 4 \cdot 9 = 36 = g(x,y)$, aber

$a_{xx} + a_{yy} = 8 + 8 = 16 \neq 0$ Also löst $a(x,y)$ das Randwertproblem nicht.

$b(x,y) = 36$ Für $(x,y) \in \partial K$ gilt offensichtlich

$b(x,y) = 36 = g(x,y)$. Weiter ist $b_{xx} + b_{yy} = 0 + 0 = 0$

$\Rightarrow$ $b(x,y)$ löst das Randwertproblem.