R.T. 6/04/05

1. Aufgabe:

Für $U(s) = \mathcal{L}[u](s)$ und $E(s) = \mathcal{L}[e](s)$ gilt:

$$25 \frac{1}{s} U(s) + 8\, U(s) + s\, U(s) = E(s)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{s}(s^2+8s+25)\, U(s) = E(s)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{U(s) = \frac{s}{s^2+8s+25}\, E(s)}$$

Übertragungsfkt. von S: $\quad H(s) = \frac{s}{s^2+8s+25}$

N.S. von $s^2+8s+25$: $\quad s_{1/2} = -4 \pm \sqrt{16-25} = -4 \pm 3i$

Also:

$$H(s) = \frac{s}{(s+4)^2+9} = \underbrace{\frac{s+4}{(s+4)^2+3^2}} - \underbrace{\frac{4}{(s+4)^2+3^2}}$$

$$= \mathcal{L}[\cos(3t)](s+4) \qquad = 4\,\mathcal{L}[\tfrac{1}{3}\sin(3t)](s+4)$$

$$= \mathcal{L}[e^{-4t}\cos(3t)](s) \qquad = \mathcal{L}[\tfrac{4}{3} e^{-4t}\sin(3t)](s)$$

und

$$\boxed{h(t) = e^{-4t}\left(\cos(3t) - \frac{4}{3}\sin(3t)\right)}$$

ist die Impulsantwort von S.

Frequenzgang: $\mathcal{F}: \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \; \omega \mapsto \mathcal{F}(\omega) = H(i\omega) = \frac{i\omega}{-\omega^2+8i\omega+25}$

Da

$$\mathcal{F}(5) = \frac{i5}{i40} = \frac{1}{8} = \frac{1}{8} e^{i\cdot 0} \quad \leadsto \text{Phasenverschiebung } \varphi = 0$$

ist

$$\boxed{u_{stat}(t) = \frac{1}{8}\sin(5t)}$$

die stationäre Antwort auf $e(t) = \sin(5t)$.

2. Aufgabe:

$$\mathcal{Z}[f_n](z) = \mathcal{Z}[(1 * (n3^n))_n](z)$$

$$= \frac{z}{z-1} \cdot \underbrace{\mathcal{Z}[n\,3^n](z)}_{= 3\frac{z}{(z-3)^2}}$$

$$= 3z \frac{z}{(z-1)(z-3)^2}$$

PBZ: $$\frac{z}{(z-1)(z-3)^2} = A\frac{1}{z-1} + B\frac{1}{z-3} + C\frac{1}{(z-3)^2}$$

$$= \frac{A(z-3)^2 + B(z-1)(z-3) + C(z-1)}{(z-1)(z-3)^2}$$

Einsetzen liefert

$z=3$: $2C = 3 \Rightarrow C = \frac{3}{2}$

$z=1$: $4A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{4}$

$z=2$: $A - B + C = 2 \Rightarrow B = A + C - 2 = -\frac{1}{4}$

Also $$\mathcal{Z}[f_n](z) = 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\frac{z}{z-1} - \frac{1}{4}\frac{z}{z-3} + \frac{3}{2}\frac{z}{(z-3)^2} \right)$$

und $$\boxed{f_n = \frac{3}{4} - \frac{3}{4}3^n + \frac{3}{2}n\,3^n}.$$

3. Aufgabe:

Produktansatz: $u(x,y) = X(x) \cdot Y(y)$

Dann.
$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda$$

Neue RW'e:

$$\begin{cases} X(0)=0, \quad X(2\pi)=0 \\ Y(0)=0 \end{cases}$$

$\boxed{\text{I}}$ Berechnung von Lösungen für X

Setze: $\lambda = -\omega^2, \quad \omega > 0.$

Lösungsansatz der DGL:

$$X(x) = A \sin(\omega x) + B \cos(\omega x)$$

Einsetzen der RW'e:

$$X(0) = B = 0$$

$$X(2\pi) = A \underbrace{\sin(2\pi\omega)}_{=0, \text{ falls } 2\pi\omega = k\pi \Leftrightarrow \omega = \frac{k}{2}} = 0$$

Nicht triviale Lösungen:

$$X_k(x) = A_k \sin\left(\frac{k}{2}x\right) \quad \text{für } \lambda = -\left(\frac{k}{2}\right)^2.$$

$\boxed{\text{II}}$ Berechnung von Lösungen für Y für $\lambda = -\left(\frac{k}{2}\right)^2$

Lösungsansatz:

$$Y(y) = C \sinh\left(\frac{k}{2}y\right) + D \cosh\left(\frac{k}{2}y\right)$$

Einsetzen des AW's:

$$Y(0) = D = 0$$

Lösungsgen. des AWP's:

$$Y_k(t) = C_k \sinh\left(\frac{k}{2} y\right)$$

III Superposition liefert die Lösungen

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\left(\frac{k}{2}x\right) \cdot \sinh\left(\frac{k}{2}y\right)$$

Insbesondere

$$u(x,2\pi) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sinh(k\pi) \cdot \sin\left(\frac{k}{2}x\right) \overset{!}{=} \sin(x)$$

$$\rightarrow A_2 = \frac{1}{\sinh(2\pi)}$$

Lösung des kompletten Problems:

$$u(x,y) = \frac{1}{\sinh(2\pi)} \sin(x) \sinh(y)$$

4. Aufgabe:

Für $U(\omega,t) = \mathcal{F}[u(\cdot,t)](\omega)$ gilt

$$\begin{cases} U_t(\omega,t) = -\omega^2 U(\omega,t) + U(\omega,t), \\ U(\omega,0) = 2\sqrt{\pi}\, e^{-\omega^2} . \end{cases}$$

Lösungsges der DGL:

$$U(\omega,t) = A_\omega\, e^{(-\omega^2+1)t}$$

Anpassung an den AW:

$$U(\omega,0) = A_\omega \overset{!}{=} 2\sqrt{\pi}\, e^{-\omega^2}$$

Lösung des AWP's.

$$U(\omega,t) = 2\sqrt{\pi}\, e^{-\omega^2(t+1)} \cdot e^{t}$$

Rücktransformation:

$$u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}\left[2\sqrt{\pi}\, e^{t}\, e^{-\omega^2(t+1)}\right](x)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\, 2\sqrt{\pi}\, e^{t}\, \underbrace{\mathcal{F}\left[e^{-(t+1)\omega^2}\right](-x)}_{\sqrt{\frac{\pi}{t+1}}\, e^{-\frac{x^2}{4(t+1)}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{t+1}}\, e^{t}\, e^{-\frac{x^2}{4(t+1)}} .$$

V.T. 6/04/05

1. Aufgabe:

i.) $|f_1(t)| = |t^{21}| \; |\cos(t)| \leq M \, e^{\alpha t}$ mit $\alpha = 21$ und $M=1$

ii.) $|\cosh(5t)| = \frac{1}{2}\left(e^{5t} + e^{-5t}\right) = \frac{1}{2} e^{5t} \underbrace{\left(1+e^{-10t}\right)}_{\leq 2} \leq e^{5t}$

iii) $|e^{-t^2}| \leq 1$

iv.) $|\sinh(t^2)| = \left|\frac{1}{2}\left(e^{t^2} - e^{-t^2}\right)\right| = \frac{1}{2} e^{t^2}\left(1-e^{-2t^2}\right) \geq \frac{1}{2}(1-e^{-2}) e^{t^2}$

für $t \geq 1$

$\geq \frac{1}{2}(1-e^{-2}) e^{\alpha t}$.

für $t \geq a$ und $a \geq 1$ beliebig

Also sind die Funktionen f_1, f_2 und f_3 von exponentieller Ordnung, und f_4 ist nicht von exponentieller Ordnung.

2. Aufgabe.

$\mathcal{L}[f(t)](s) = \mathcal{L}[t^{1/2}](s+2)$

Da $\mathcal{L}[\underbrace{t^{1/2}}_{=t \cdot t^{-1/2}}](s) = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}[t^{-1/2}](s) = -\pi^{1/2}\left(-\frac{1}{2}\right) s^{-3/2}$,

folgt $\mathcal{L}[f(t)](s) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}(s+2)^{-3/2}$

3. Aufgabe:

u_1 erfüllt Rand- und Anfangswertbed. aber nicht die DGL

u_2 löst DGL und erfüllt die Rand- und Anfangsbed.

$\rightsquigarrow$ Lösung des Rand-AWPs

u_3 erfüllt Randwerte, aber nicht den Anfangswert und die DGL.

4. Aufgabe:

$$\mathcal{Z}[f_n](z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \frac{1}{z^n} = \sum_{n=0}^{100} f_n \frac{1}{z^n}, \quad \text{d.h.,}$$

die Reihe ($\mathcal{Z}$-Transformation) konvergiert zumindest für alle $z \neq 0$!

5. Aufgabe:

Ansatz: $u(x,y) = X(x) + Y(y)$

Dann: $X''(x) + Y''(y) \stackrel{!}{=} 0$

$\Rightarrow X''(x) = -Y''(y) = \lambda$ konstant

Lösungsges. für X:

$$X(x) = \frac{1}{2}\lambda x^2 + Ax + B \qquad (A,B \text{ beliebig})$$

Lösungsges. für Y:

$$Y(y) = -\frac{1}{2}\lambda y^2 + Cx + D \qquad (C,D \text{ beliebig})$$

Also erhält man die Lösungen:

$$u(x,y) = \frac{1}{2}\lambda(x^2-y^2) + Ax + Cy + B \qquad (\lambda, A, B, C \text{ beliebig})$$

6. Aufgabe:

$$\mathcal{F}\left[f(2x+3) + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-3|x-u|} f(u)\, du\right](\omega)$$

$$= \frac{1}{2} \underbrace{\mathcal{F}[f(x+3)]\left(\frac{\omega}{2}\right)}_{= e^{i\frac{\omega}{2}\cdot 3} \cdot F\left(\frac{\omega}{2}\right)} + \underbrace{\mathcal{F}[e^{-3|x|}](\omega)}\cdot F(\omega)$$

$$= \mathcal{L}[e^{-3|x|}](i\omega) + \mathcal{L}[e^{-3|x|}](-i\omega)$$

$$= \frac{1}{i\omega+3} + \frac{1}{-i\omega+3}$$

$$= \frac{6}{\omega^2+9}$$

$$= \frac{1}{2} e^{\frac{3}{2}i\omega} \cdot F(\omega) + \frac{6}{\omega^2+9} \cdot F(\omega).$$