Juli-Klausur ITPDG

Lösungen - Rechenteil

1. Aufgabe: **11 Punkte**

Die Laplacetransformierte $Y(s) = \Big[y(t)\Big](s)$ genügt

$$sY(s) - y(0) + 2Y(s) + \frac{1}{s}Y(s) = \Big[e^{-t}\Big](s) = \frac{1}{s+1},$$

also:

$$Y(s) = \frac{s}{(s+1)^3}$$

$\frac{1}{(s+1)^3}$ läßt sich identifizieren als die Laplacetransformierte von $f : t \mapsto \frac{t^2e^{-t}}{2}$, also ist $Y(s) = s \cdot \frac{1}{(s+1)^3}$ die von

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{t^2e^{-t}}{2}\right\} = -(\frac{t^2}{2} - t)e^{-t}$$

(weil $f(0) = 0$).

Wir haben die Lösung $y(t)$ von dieser Integro-Differenzialgleichung identifiziert als

$$y(t) = (t - \frac{t^2}{2})e^{-t}$$

2. Aufgabe: **9 Punkte**

Zuerst hat man

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-\iota\omega x}dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\,(\cos\omega x - \iota\sin\omega x)\,dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\cos\omega x dx,$$

und dann mit $\cos a\cos b = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right)$:

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \tfrac{1}{2}\left\{\textstyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos(\omega+2)xdx + \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos(\omega-2)xdx\right\} \\ &= \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{\sin(\omega+2)x}{\omega+2} + \tfrac{\sin(\omega-2)x}{\omega-2}\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \tfrac{1}{2}\left[2\cdot\tfrac{\sin(\omega\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2})}{\omega+2} + 2\cdot\tfrac{\sin(\omega\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2})}{\omega-2}\right] \\ &= \tfrac{4\cos(\frac{\pi}{4}\omega)}{4-\omega^2} \end{aligned}$$

3. Aufgabe: **8 Punkte**

Die $\mathcal{Z}$-Transformierte $F(z) = \mathcal{Z}\left[(f_n)_{n\geq 0}\right](z)$ genügt:

$$z^2\left(F(z) - 1 - z^{-1}\right) - 2z\left(F(z) - 1\right) + F(z) = 0,$$

also

$$F(z) = \frac{z}{z-1},$$

was schon zeigt, daß

$$f_n = 1, \quad n \geq 0.$$

4. Aufgabe: **12 Punkte**

Mit einem Separationsansatz $u(x;t) = X(x)T(t)$ erhält man hier:

$$4\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda$$

Weil die Randbedingungen in $x = 0$ und $x = \frac{\pi}{2}$ homogen sind, kann man schon $\lambda = -\omega^2$ setzen, wobei $\omega \in]0; +\infty[$. Dann hat man

$$X''(x) + \omega^2 X(x) = 0,$$

also

$$X(x) = A(\omega)\cos\omega x + B(\omega)\sin\omega x$$

Mit $X(0) = 0$ kommt dann: $A(\omega) = 0$, und $X(\frac{\pi}{2}) = 0$ heißt dann:

$$\omega \in 2\mathbb{Z}, \text{ also: } \omega = 2k,$$

wobei $k \geq 1$ eine ganze Zahl ist. Einsetzen in der T-Gleichung liefert jetzt

$$4T''(t) + 4k^2T(t) = 0, \text{ also: } T(t) = \alpha_k \cos kt + \beta_k \sin kt$$

Nach dem Superpositionsprinzip erhält man Lösungen von der Form

$$u(x;t) = \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos kt + \beta_k \sin kt) \sin 2kx,$$

und man muß noch die Anfangsbedingungen in Betracht nehmen. Erstens hat man

$$u(x;0) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sin 2kx = 2\sin 4x + 4\sin 8x,$$

also:

$$\alpha_k = \begin{cases} 2 & \text{für } k = 2 \\ 4 & \text{für } k = 4 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zweitens hat man

$$u_t(x;0) = \sum_{k=1}^{\infty} k\beta_k \sin 2kx = 3\sin 6x,$$

also:

$$\beta_k = \begin{cases} 1 & \text{für } k = 3 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Jetzt ist die Lösung $u(x;t)$ völlig identifiziert, wir haben nämlich

$$u(x;t) = 2\cos 2t \sin 4x + \sin 3t \sin 6x + 4\cos 4t \sin 8x.$$