Juli-Klausur ITPDG

Lösungen - Verständnisteil

1. Aufgabe: **6 Punkte**

Mit $t = \frac{2}{z}$ erhält man:

$$\sin\frac{2}{z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \frac{2^{2k+1}}{z^{2k+1}},$$

was schon zeigt, daß die Folge $(f_n)_{n\geq 0}$ gegeben ist durch

$$f_n = \begin{cases} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{2^n}{n!} & \text{für } n \text{ ungerade} \\ 0 & \text{für } n \text{ gerade} \end{cases}$$

2. Aufgabe: **10 Punkte**

a) Die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \frac{e^{-(\sin x)^2}}{1+x^2}$$

ist eine Schwartz-Funktion.

Falsch

b) Die Funktion $g : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$g(t) := e^{\sqrt{1+t^2}}$$

ist von exponentieller Ordnung.

Richtig

c) Für die N-reihige Fouriermatrix F_N gilt:

$$F_N^{-1} = \overline{F_N}$$

Falsch

d) Wenn die Schwartzsche Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ gerade ist, dann ist ihre Fouriertransformation $\mathcal{F}[f]$ eine reellwertige Funktion auf $\mathbb{R}$.

Richtig

e) Wenn die Schwartz-Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ von endlicher Bandbreite ist, dann ist auch ihre Fouriertransformation $\mathcal{F}[f]$ von endlicher Bandbreite.

Falsch

Bewertung: für jedes richtige Kreuz erhält man 2 Punkte, für jedes falsche Kreuz werden zwei Punkte abgezogen, bei negativer Gesamtpunktzahl wird die Aufgabe mit null Punkten gewertet.

3. Aufgabe: 9 Punkte

Die Kettenregel liefert hier, mit $\tau = x^2 + t$:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x;t) = f'(\tau)\frac{\partial \tau}{\partial x} = 2xf'(\tau), \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x;t) = \frac{\partial}{\partial x}\left\{2xf'(\tau)\right\} = 2f'(\tau) + 4x^2 f''(\tau),$$

und

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x;t) = f'(\tau)\frac{\partial \tau}{\partial t} = f'(\tau), \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x;t) = f''(\tau).$$

Also hat man

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x;t) + 4t\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x;t) = 4(x^2+t)f''(\tau) + 2f'(\tau) = 4\tau f''(\tau) + 2f'(\tau),$$

so daß $u(x;t) = f(x^2+t)$ eine Lösung ist, sobald

$$2\tau f''(\tau) + f'(\tau) = 0.$$

4. Aufgabe: 7 Punkte

Offensichtlich gilt

$$\frac{d}{dt}\left\{e^t \cos t\right\} = e^t(\cos t - \sin t)$$

Eine Anwendung der Ableitungsregel liefert also

$$\mathcal{L}\Big[e^t(\cos t - \sin t)\Big](s) = s\mathcal{L}\Big[e^t \cos t\Big](s) - \left\{e^t \cos t\right\}\big|_{t=0} = \frac{s(s-1)}{(s-1)^2+1} - 1 = \frac{s-2}{1+(s-1)^2}$$

5. Aufgabe: 8 Punkte

Für die Impulsantwort $h(t)$ gilt

$$\int_0^t h(u)du = (h*1)(t) = t^2, \text{ also } h(t) = 2t.$$

Die entsprechende Übertragungsfunktion ist dann (siehe Tabelle)

$$H(s) = \Big[2t\Big](s) = \frac{2}{s^2},$$

und den Frequenzgang des Systems ist dann per Definition

$$F(\omega) = H(\iota\omega) = -\frac{2}{\omega^2}$$