Oktober-Klausur ITPDG

Lösungen - Rechenteil

1. Aufgabe: **9 Punkte**

Die Laplacetransformierte $Y(s) = \Big[y(t)\Big](s)$ genügt

$$(s^2Y(s) - s) + 4(sY(s) - 1) + 4Y(s) = \frac{1}{s+2},$$

also:

$$(s^2 + 4s + 4)Y(s) = (s+4) + \frac{1}{s+2},$$

$$Y(s) = \frac{s+4}{(s+2)^2} + \frac{1}{(s+2)^3} = \frac{1}{s+2} + \frac{2}{(s+2)^2} + \frac{1}{(s+2)^3},$$

was schon zeigt, daß

$$y(t) = e^{-2t} + 2te^{-2t} + \frac{t^2e^{-2t}}{2} = (\frac{t^2}{2} + 2t + 1)e^{-2t}$$

(siehe Tabelle).

2. Aufgabe: **11 Punkte**

Wir errinern uns daran, daß

$$\mathcal{F}[e^{-a|x|}](\omega) = \frac{2a}{a^2+\omega^2}, \quad \mathcal{F}[\frac{1}{1+b^2x^2}](\omega) = \frac{\pi}{b}e^{-\frac{|\omega|}{b}}$$

$\mathcal{F}[f]$ ist von der Form:

$$\mathcal{F}[f](\omega) = \left(\mathcal{F}[g] * \mathcal{F}[h]\right)(\omega),$$

wobei

$$\mathcal{F}[g](\omega) = e^{-2|\omega|}, \quad \mathcal{F}[h](\omega) = \frac{1}{1+4\omega^2},$$

also hat man dann:

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\mathcal{F}[g] * \mathcal{F}[h]\right)(\omega)e^{\imath\omega x}d\omega \\ & = & \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\left[\mathcal{F}[g] * \mathcal{F}[h]\right](-x) \\ & = & \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\left[\mathcal{F}[g]\right](-x) \cdot \mathcal{F}\left[\mathcal{F}[h]\right](-x) \\ & = & \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{4}{4+x^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot e^{-\frac{|x|}{2}} \\ & = & \frac{e^{-\frac{|x|}{2}}}{4+x^2} \end{array}$$

3. Aufgabe: **10 Punkte**

Die $\mathcal{Z}$-Transformierte F der gesuchten Lösung $\boldsymbol{f} = (f_n)_{n\geq 0}$ genügt

$$z^2(F(z) - 1 - \frac{1}{z}) - F(z) = \frac{z}{z-1},$$

also:

$$(z^2-1)F(z) = \frac{z}{z-1} + z^2 + z,$$

$$F(z) = \frac{z}{(z-1)^2(z+1)} + \frac{z}{z-1} = \frac{z}{z-1}\cdot\frac{1}{z^2-1} + \frac{z}{z-1}$$

Ferner gilt, daß

$$\frac{z}{z-1}\cdot\frac{1}{z^2-1} = \mathcal{Z}[\boldsymbol{g}](z)\cdot\mathcal{Z}[\boldsymbol{h}](z) = \mathcal{Z}[\boldsymbol{g}*\boldsymbol{h}](z),$$

wobei $g_n \equiv 1$, und $f_n = \begin{cases} 1 & \text{für } n \text{ gerade,} \\ 0 & \text{für } n \text{ ungerade.} \end{cases}$

Dementsprechend erhält man dann

$$f_n = (\boldsymbol{g}*\boldsymbol{h})(n) + 1 = 1 + \sum_{j=0}^{n} h_j = 1 + \lfloor\frac{n}{2}\rfloor.$$

4. Aufgabe: **10 Punkte**

Mit einem Separationsansatz $u(x;t) = X(x)T(t)$ erhält man hier:

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda$$

Weil die Randbedingungen in $x=0$ und $x=\pi$ homogen sind, kann man schon $\lambda = -\omega^2$ setzen, wobei $\omega \in]0;+\infty[$. Dann hat man

$$X''(x) + \omega^2 X(x) = 0,$$

also

$$X(x) = A(\omega)\cos\omega x + B(\omega)\sin\omega x$$

Mit $X(0)=0$ kommt dann: $A(\omega)=0$, und $X(\pi)=0$ heißt dann:

$$\omega \in \mathbb{Z}, \text{ also: } \omega = k,$$

wobei $k \geq 1$ eine ganze Zahl ist. Einsetzen in der T-Gleichung liefert jetzt

$$T'(t) = -k^2 T(t), \text{ also: } T(t) = \alpha_k e^{-k^2 t}$$

Nach dem Superpositionsprinzip erhält man Lösungen von der Form

$$u(x;t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sin(kx) e^{-k^2 t},$$

und man muß nur noch die Anfangsbedingung in Betracht nehmen. Diese liefert

$$u_t(x;0) = \sum_{k=1}^{\infty} (-k^2)\alpha_k \sin kx = \cos(4x - \frac{\pi}{2}) = \sin 4x,$$

also:

$$\alpha_k = \begin{cases} \frac{-1}{16} & \text{für } k = 4 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die gesuchte Lösung ist also

$$u(x;t) = \frac{-1}{16} \sin 4x e^{-16t}$$