# Technische Universität Berlin

**Fakultät II – Institut für Mathematik**
**Prof. Dr. Ferus**

WS 05-06
22. Februar 2006

## Februar – Klausur (Rechenteil)
## Integraltransformationen und partielle Differentialgleichungen für Ingenieure

Name: ............................ Vorname: ............................

Matr.–Nr.: ........................ Studiengang: ........................

---

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen ist nur die Laplacetabelle zugelassen. Taschenrechner und Formelsammlungen sind nicht zugelassen. Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Rechenaufgaben. Geben Sie immer den **vollständigen Rechenweg** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

---

Die Gesamtklausur ist mit 40 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 12 von 40 Punkten erreicht werden.

---

**Korrektur**

| 1 | 2 | 3 | 4 | $\Sigma$ |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |
| | | | | |

## 1. Aufgabe

10 Punkte

Ein kausales LTI-System antwortet auf dem Signal $f(t)$ mit einer Funktion $y(t)$, die folgendes AWP löst

$$\begin{cases} y''(t) - 2y'(t) + 7y(t) = f(t), \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

Was sind die entsprechenden Übertragungsfunktion und Impulsantwort?

Für $Y(s) = \mathcal{L}[y](s)$ und $F(s) = \mathcal{L}[f](s)$ gilt

$$s^2 Y(s) - 2sY(s) + 7Y(s) = F(s),$$

so daß die Übertragungsfunktion $U(s)$ gegeben ist durch

$$U(s) = \frac{1}{s^2 - 2s + 7} = \frac{1}{(s-1)^2 + 6}.$$

Die entsprechende Impulsantwort $u(t)$ ist dann

$$u(t) = \frac{e^t}{\sqrt{6}} \sin(\sqrt{6}t)$$

(siehe Tabelle).

## 2. Aufgabe

10 Punkte

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + 2y_2 \\ y_2' = 5y_1 + 4y_2 \\ y_1(0) = 0, y_2(0) = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Für $Y_1(s) = \mathcal{L}[y_1](s), Y_2(s) = \mathcal{L}[y_2](s)$ gilt zunächst:

$$\begin{cases} sY_1(s) = Y_1(s) + 2Y_2(s) \\ sY_2(s) - \frac{1}{2} = 5Y_1(s) + 4Y_2(s), \end{cases}$$

also dann $Y_2(s) = \left(\frac{s-1}{2}\right) Y_1(s)$ und

$$s\left(\frac{s-1}{2}\right) Y_1(s) = 5Y_1(s) + 2(s-1)Y_1(s) + \frac{1}{2}.$$

Dazu findet man

$$Y_1(s) = \frac{1}{s^2 - 5s - 6} = \frac{1}{(s-5/2)^2 - (7/2)^2},$$

also

$$y_1(t) = \frac{2}{7} \sinh(\frac{7t}{2}) e^{\frac{5t}{2}} = \frac{1}{7}(e^{6t} - e^{-t}),$$

und dann

$$y_2(t) = \frac{1}{2}\left(y_1'(t) - y_1(t)\right) = \frac{1}{14}\left(5e^{6t} + 2e^{-t}\right) = \frac{5}{14}e^{6t} + \frac{1}{7}e^{-t}.$$

## 3. Aufgabe

10 Punkte

Berechnen Sie eine Reihendarstellung für das folgende Rand-Anfangswertproblem:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} & , (x \in [0,2], t \geq 0) \\ u(x=0;t) = u(x=2;t) = 0 & , \forall t \geq 0 \ \textit{(Randbedingungen)} \\ u(x;t=0) = f(x), \frac{\partial u}{\partial t}(x;t=0) = 0 & , \forall x \in [0;2] \ \textit{(Anfangsbedingungen)}, \end{cases}$$

wobei

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0;1] \\ 2-x, & x \in [1;2] \end{cases}$$

Mit einem Separationsansatz erhält man hier:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)} = \lambda,$$

also dann, mit $\lambda = -\omega^2$:

$$X_\omega(x) = A_\omega \cos \omega x + B_\omega \sin \omega x, \quad T_\omega(t) = C_\omega \cos \omega t + D_\omega \sin \omega t.$$

Hier sind die Grundfrequenzen derart $\omega = \omega_k = \frac{k\pi}{2}$ (dies entspricht eine nicht-triviale Erfüllung der Randbedingungen), und für jede $k \geq 1$ hat man dann Produktlösungen der Form $X_k(x)T_k(t) = a_k \cos(\frac{k\pi}{2}t)\sin(\frac{k\pi}{2}x)$ (hiermit ist auch die Anfangsbedingung $\frac{\partial u}{\partial t}(x;t=0) = 0$ erfüllt).
Nun muß man schließlich diese Produktlösungen überlagern, und das in solcher Weise, daß die Anfangsbedingung $u(x;t=0) = f(x)$ auch erfüllt wird. Diese Überlagerung ist eine Reihe derart

$$u(x;t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(\frac{k\pi}{2}t)\sin(\frac{k\pi}{2}x),$$

und die $a_k$ Koeffizienten werden jetzt eindeutig determiniert indem man $t = 0$ setzt, so daß $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(\frac{k\pi}{2}x) = f(x)$. Die gesuchte Koeffizienten lassen sich also identifizieren als Fourierkoeffizienten von der Sinus-Reihe einer ungeraden Fortsetzung $\check{f} : [-2;2] \longrightarrow \mathbb{R}$ von $f$. Also haben wir jetzt

$$a_k = \frac{2}{4}\int_{-2}^{2} \check{f}(x)\sin(\frac{k\pi}{2}x)dx = \int_0^2 f(x)\sin(\frac{k\pi}{2}x)dx$$

Mit einer Wechsel von Variablen $y = (2-x)$ stellt man fest, daß

$$\int_1^2 (2-x)\sin(\frac{k\pi}{2}x)dx = \int_0^1 y\sin(-\frac{k\pi}{2}y - k\pi)dy = \begin{cases} \int_0^1 y\sin(\frac{k\pi}{2}y)dy, & k \text{ ungerade}, \\ -\int_0^1 y\sin(\frac{k\pi}{2}y)dy, & k \text{ gerade}. \end{cases}$$

Daraus folgt, daß

$$a_k = \int_0^2 f(x)\sin(\frac{k\pi}{2}x)dx = \begin{cases} 2\int_0^1 y\sin(\frac{k\pi}{2}y)dy, & k \text{ ungerade}, \\ 0, & k \text{ gerade}, \end{cases} = \begin{cases} (-1)^{\frac{k-1}{2}}\frac{8}{k^2\pi^2}, & k \text{ ungerade}, \\ 0, & k \text{ gerade}, \end{cases}$$

die gesuchte Lösung ist also

$$u(x;t) = 8\sum_{l=1}^{+\infty} \frac{(-1)^l}{(2l+1)^2\pi^2} \cos\left(\frac{(2l+1)\pi}{2}t\right)\sin\left(\frac{(2l+1)\pi}{2}x\right).$$

## 4. Aufgabe

10 Punkte

Lösen Sie das Randwertproblem (Potentialgleichung auf einer Kreisscheibe):

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0 & \text{für } r = \sqrt{x^2+y^2} < 1, \\ u(x,y) = u_R(x,y) & \text{für } r = \sqrt{x^2+y^2} = 1, \end{cases}$$

wobei: $u_R(x = \cos\varphi, y = \sin\varphi) = 1 + \sin 2\varphi + 2\cos 3\varphi$.

**Hinweise:** der Laplaceoperator in Polarkoordinaten lautet $\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$.
Denken Sie daran, daß die gesuchte Lösung $u$ bei $r = 0$ beschränkt bleibt.

Mit einem Separationsansatz $u(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$ erhält man hier:

$$\frac{R''(r)}{R(r)} + \frac{1}{r}\frac{R'(r)}{R(r)} = \frac{-1}{r^2}\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)},$$

oder noch

$$\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = -r^2\frac{R''(r)}{R(r)} - r\frac{R'(r)}{R(r)} = \lambda,$$

für eine gewisse *Separationskonstante* $\lambda$. Für $R$ heißt es dann

$$r^2R''(r) + rR'(r) + \lambda R(r) = 0,$$

also $R(r) = C \cdot r^\alpha$ und $\lambda = -\alpha^2$, für eine gewisse Potenz $\alpha \geq 0$ (Lösungen derart $R(r) = D \cdot r^{-\alpha}$ werden nicht in Betracht genommen, weil die gesuchte Lösung beschränkt um $r = 0$ bleiben soll).
Setzt man $\lambda = -\alpha^2$ in der Gleichung für $\Phi$, so erhält man

$$\Phi(\varphi) = a_\alpha \cos(\alpha\varphi) + b_\alpha \sin(\alpha\varphi).$$

Mit einer Superposition hat man dann

$$u(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \sum_{\alpha\geq 0} \left(a_\alpha\cos(\alpha\varphi) + b_\alpha\sin(\alpha\varphi)\right) r^\alpha.$$

Setzt man $r = 1$ ein, so erhält man

$$a_0 = b_2 = 1, a_3 = 2,$$

und alle andere Koeffizienten verschwinden. Die gesuchte Lösung ist also

$$u(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = 1 + r^2\sin 2\varphi + 2r^3\cos 3\varphi,$$

oder zurück in Kartesische Koordinaten:

$$u(x,y) = 1 + 2xy + 2x^3 - 6xy^2.$$