Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik WS 05-06
Prof. Dr. Ferus 22. Februar 2006

Februar – Klausur (Verständnisteil)
Integraltransformationen und partielle Differentialgleichungen für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen ist nur die Laplacetabelle zugelassen. Taschenrechner und Formelsammlungen sind nicht zugelassen. Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Verständnisaufgaben, sie sollten ohne großen Rechenaufwand mit den Kenntnissen aus der Vorlesung lösbar sein. Geben Sie, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

Die Gesamtklausur ist mit 40 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 12 von 40 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	4	5	Σ

1. Aufgabe

6 Punkte

Ein kausales LTI System antwortet auf die Erregung $u_1(t) = t$ mit der Stromfunktion $i_1(t) = \sin t - t\cos t$. Was sind dann die Übertragungsfunktion und Impulsantwort?

Die Übertragungsfunktion $H(s)$ genügt: $H(s)\cdot\frac{1}{s^2} = \frac{2}{(s^2+1)^2}$, so daß

$$H(s) = \frac{2s^2}{(s^2+1)^2}.$$

Mit einem weiteren Blick in der Tabelle stellt man dann fest, daß die entsprechende Impulsantwort einfach durch $h(t) = \sin t + t\cos t$ gegeben ist.

2. Aufgabe

6 Punkte

Beweisen Sie oder widerlegen Sie folgende Aussage mittels bekannten Eigenschaften der Fouriertransformation:

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f''(t+1-u)g(u)du\right](\omega) = -\omega^2 e^{\iota\omega}\mathcal{F}[f](\omega)\mathcal{F}[g](\omega),$$

wobei f und g beliebige Schwartz-Funktionen sind.

Anwendungen von der Verschiebungsregel und von der Faltungsregel zusammen mit zwei sukzessive Anwendungen von der Ableitungsregel liefern hier:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f''(t+1-u)g(u)du\right](\omega) &= \mathcal{F}[(f''*g)(t+1)](\omega)\\
&= e^{\iota\omega}\mathcal{F}[f''*g](\omega)\\
&= e^{\iota\omega}\mathcal{F}[f''](\omega)\mathcal{F}[g](\omega)\\
&= e^{\iota\omega}(\iota\omega)\mathcal{F}[f'](\omega)\mathcal{F}[g](\omega)\\
&= e^{\iota\omega}(\iota\omega)^2\mathcal{F}[f](\omega)\mathcal{F}[g](\omega),
\end{aligned}$$

so daß die angegebene Aussage stimmt.

3. Aufgabe

6 Punkte

Für zwei gegebene Schwartz-Funktionen k, f und festes $\lambda \in \mathbb{C}$ betrachtet man folgende Fredholmsche Integralgleichung:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} k(t-u)x(u)du - \lambda\cdot x(t) = f(t).$$

Sei $X(\omega)$ die Fourier-Transformierte von x, und $K(\omega), F(\omega)$ die von k, f.
Welcher Gleichung genügt X,wenn x eine Lösung ist?

Im Frequenzraum hat man einfach

$$K(\omega)X(\omega) - \lambda X(\omega) = F(\omega),$$

so daß $X(\omega) = \frac{F(\omega)}{K(\omega)-\lambda}$.

4. Aufgabe

10 Punkte

Für $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ definiert man die Funktion $\Psi_{a,n}(r,\varphi)$ durch

$$\Psi_{a,n}(r,\varphi) = J_n(r)\cos a\varphi,$$

wobei J_n die Besselsche Funktion 1. Art zum Index n ist.
Zeigen Sie, daß $\Psi_{a,n}$ genau dann eine Eigenfunktion zum Laplaceoperator in Polarkoordinaten definiert, wenn $a^2 = n^2$. Berechnen Sie in diesem Fall den zugehörigen Eigenwert.

Hinweis: der Laplaceoperator in Polarkoordinaten lautet $\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$, und die Besselsche Funktion 1. Art zum Index n loßt die Differentialgleichung

$$x^2 J_n''(x) + xJ_n'(x) + (x^2 - n^2)J_n(x) = 0.$$

Unter Beachtung von der Hinweis erhält man hier:

$$\begin{aligned}
\Delta\Psi_{a,n}(r,\varphi) &= \left(J_n''(r) + \tfrac{1}{r}J_n'(r)\right)\cos a\varphi - \tfrac{a^2}{r^2}J_n(r)\cos a\varphi \\
&= \tfrac{1}{r^2}\left(r^2 J_n''(r) + rJ_n'(r) - a^2 J_n(r)\right)\cos a\varphi \\
&= \tfrac{1}{r^2}(n^2 - r^2 - a^2)J_n(r)\cos a\varphi,
\end{aligned}$$

so daß $\Psi_{a,n}(r,\varphi)$ genau dann eine Eigenfunktion zum Laplaceoperator in Polarkoordinaten liefert, wenn $a^2 = n^2$, mit entsprechenden Eigenwert -1 .

5. Aufgabe

12 Punkte

Lösen Sie folgendes Randwertproblem mit dem Separationsansatz:

$$\begin{cases}
t\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0 \\
u(0;t) = t \\
\lim\limits_{x\to+\infty} u(x;t) = 0.
\end{cases}$$

Mit $u(x;t) = X(x)T(t)$ erhält man hier

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = t\frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda,$$

also

$$T(t) = a \cdot t^\lambda, \quad X(x) = b \cdot e^{\sqrt{\lambda}x} + c \cdot e^{-\sqrt{\lambda}x}.$$

Der Superpositionsprinzip entspricht eine Reihendarstellung derart

$$u(x;t) = \sum_\lambda (b_\lambda \cdot e^{\sqrt{\lambda}x} + c_\lambda \cdot e^{-\sqrt{\lambda}x})t^\lambda,$$

aber beim einsetzen von $x = 0$ stellt man fest, daß die Separationskonstante $\lambda = 1$ alleine vorkommt, also daß die gesuchte Lösung von der Form

$$u(x;t) = (b_1 \cdot e^x + c_1 \cdot e^{-x})t$$

sein soll. Mit Rücksicht auf der zweiten Bedingung erhält man schließlich:

$$b_1 = 0, \quad u(x;t) = e^{-x}t.$$