Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik WS 05-06

Prof. Dr. Ferus 12. April 2006

April – Klausur (Verständnisteil)
Integraltransformationen und partielle Differentialgleichungen für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen ist nur die Laplacetabelle zugelassen. Taschenrechner und Formelsammlungen sind nicht zugelassen. Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Verständnisaufgaben, sie sollten ohne großen Rechenaufwand mit den Kenntnissen aus der Vorlesung lösbar sein. Geben Sie, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

Die Gesamtklausur ist mit 40 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 12 von 40 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	4	5	Σ

1. Aufgabe

6 Punkte

Ein kausales LTI-System antwortet auf die Eingangsfunktion $e(t) = 1$ mit dem Signal $y(t) = \sinh(t) + t\cosh(t)$ (wobei $t \geq 0$).
Was sind die entsprechende Übertragungsfunktion und Impulsantwort?

Sei h die Impulsantwort und H die Übertragungsfunktion. Hier hat man

$$(h * e)(t) = \int_0^t h(u)du = y(t),$$

so daß

$$h(t) = y'(t) = 2\cosh t + t\sinh t.$$

Dementsprechend erhält man dann:

$$\begin{aligned} H(s) &= \mathcal{L}[h](s) \\ &= \tfrac{2s}{s^2-1} - \left(\tfrac{1}{s^2-1}\right)' \\ &= \tfrac{2s}{s^2-1} + \tfrac{2s}{(s^2-1)^2} \\ &= \tfrac{2s^3}{(s^2-1)^2} \end{aligned}$$

2. Aufgabe

6 Punkte

Geben Sie eine Lösung $f : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ zur Integralgleichung:

$$\int_0^t f(t-u)f(u)du = 9te^t$$

Hinweis: wenden Sie einen Faltungssatz an.

Sei $F(s) = \mathcal{L}[f](s)$. Im s-Bereich hat man:

$$F(s)^2 = 9\mathcal{L}[te^t](s) = \frac{9}{(s-1)^2},$$

so daß

$$F(s) = \frac{\pm 3}{(s-1)}.$$

Also ist

$$f(t) = 3e^t$$

eine Lösung.

3. Aufgabe

6 Punkte

Benutzen Sie die Orthogonalitätsrelationen für Legendre-Polynome, um den Wert von $\int_0^1 P_3(x)P_5(x)dx$ anzugeben. Begründen Sie ihre Antwort.

Die Legendre-Polynome P_3 und P_5 sind beide *ungerade* Funktionen, so daß der Produkt $x \mapsto P_3(x)P_5(x)$ eine gerade Funktion definiert. Deswegen gilt:

$$\int_0^1 P_3(x)P_5(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 P_3(x)P_5(x)dx = 0.$$

(In der letzten Gleichung haben wir die Orthogonalitätsrelationen benutzt).

4. Aufgabe

10 Punkte

Finden Sie mit Hilfe des Separationsansatzes eine Lösung $u = u(t;x)$ zur partiellen Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t;x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t;x), \quad t, x \in \mathbb{R},$$

welche der Anfangsbedingung $u(0;x) = \sin 2x$ genügt.

Mit einem Ansatz derart: $u(t;x) = T(t) \cdot X(x)$ erhält man

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda,$$

wobei λ eine *Separationskonstante* ist. Zum Zeitpunkt $t = 0$ gilt:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t;x) = -4,$$

also haben wir hier $\lambda = -4$, dementsprechend liefert

$$u(t;x) = \cos 2t \sin 2x$$

eine Lösung zum angegebenen Problem ($u(t;x) = (\cos 2t + \sin 2t) \sin 2x$ wäre auch OK, aber $u(t;x) = \sin 2t \sin 2x$ nicht).

5. Aufgabe

12 Punkte

Sei $u = u(t;x)$ eine Lösung zu

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t;x) = -\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(t;x), \quad x \in \mathbb{R}, t > 0.$$

Es gelte zum Zeitpunkt $t = 0$:

$$\mathcal{F}\left[u(0;\cdot)\right](\omega) = U(0;\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(0;x)e^{-\iota\omega x}dx = e^{-\omega^4}, \forall \omega \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie damit die Fourier-Transformierte $U(t;\omega) = \mathcal{F}\left[u(t;\cdot)\right](\omega)$ von u bzgl. x, zu einem beliebigen Zeitpunkt $t > 0$.

Für eine beliebige Schwartz-Funktion $x \mapsto f(x)$ gilt:

$$\mathcal{F}[f'](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)e^{-\iota\omega x}dx = \iota\omega\mathcal{F}[f](\omega).$$

Also haben wir dann:

$$\begin{array}{rcl} \frac{\partial U}{\partial t}(t;\omega) & = & \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} u(t;x)e^{-\iota\omega x}dx\right) \\ & = & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial t}(t;x)e^{-\iota\omega x}dx \\ & = & -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(t;x)e^{-\iota\omega x}dx \\ & = & -\omega^4 \int_{-\infty}^{+\infty} u(t;x)e^{-\iota\omega x}dx \\ & = & -\omega^4 U(t;\omega) \end{array}$$

(wir gehen davon aus, daß die Lösung u ßchön genugïst, damit dem Austausch von Ableitung in t und Integration in x gültig ist). Daraus folgt unmittelbar:

$$\log\left(U(t;\omega)\right) = -\omega^4 \cdot t + K(\omega),$$

mit Rücksicht auf der angegebenen Anfangsbedingung erhält man dann

$$K(\omega) = -\omega^4, \quad U(t;\omega) = e^{-\omega^4(t+1)}.$$