Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik
Prof. Dr. Bärwolff

SS 06
26. Juli 2006

Juli – Klausur (Verständnisteil)
Integraltransformationen und partielle Differentialgleichungen für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen ist nur die Laplacetabelle zugelassen. Taschenrechner und Formelsammlungen sind nicht zugelassen. Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Verständnisaufgaben, sie sollten ohne großen Rechenaufwand mit den Kenntnissen aus der Vorlesung lösbar sein. Geben Sie, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

Die Gesamtklausur ist mit 40 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 12 von 40 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	4	5	6	Σ

1. Aufgabe 8 Punkte

Welche der folgenden Funktionen sind von exponentieller Ordnung, welche nicht?

$$\begin{aligned} f_1(t) &= t^{10}\cos(t) \\ f_2(t) &= \sinh(2t) \\ f_3(t) &= e^{-t^5} \\ f_4(t) &= \cosh(t^2). \end{aligned}$$

Begründen Sie Ihre Antwort.

2. Aufgabe 7 Punkte

Es sei $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$ die Gamma-Funktion. Die Reihendarstellung der Besselfunktion

$$J_\lambda(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\lambda \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma(m+1)\Gamma(\lambda+m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m}$$

liefert Lösungen für die Besselsche Differentialgleichung

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \lambda^2)y = 0.$$

Folgern Sie daraus, dass

$$J_{1/2}(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi x}} \cdot \sin x$$

gilt.
Tipp: $J_{1/2}(x)$ ist die einzige Lösung der zugehörigen Bessel-DGL, deren Grenzwert für $x \to 0$ beschränkt ist.

3. Aufgabe 7 Punkte

Die Legendre-Funktionen erster Art haben unter anderen die folgende Darstellung:

$$P_k(x) := \frac{1}{2^k} \sum_{j=0}^{[k/2]} (-1)^j \frac{(2k-2j)!}{j!(k-j)!(k-2j)!} x^{k-2j},$$

und die Legendre-Funktionen zweiter Art sind durch

$$Q_k(x) := \frac{1}{2}P_k(x)\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| - \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j} P_{j-1}(x)P_{k-j}(x), \quad x \neq 1,\ x \neq -1$$

gegeben.
Zeigen Sie, dass P_1 und Q_1 linear unabhängig sind.

4. Aufgabe

6 Punkte

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind.

(Jede richtige Antwort gibt 2 Punkte, für jede falsche Antwort werden 2 Punkte abgezogen, keine Antwort gibt 0 Punkte, bei negativer Gesamtpunktzahl wird die Aufgabe mit 0 Punkten gewertet. Es sind keine Begründungen notwendig.)

- Wenn $\mathcal{L}[f](s)$, die Laplacetransformierte von f, für $s = 6 + 5i$ konvergiert, dann konvergiert sie auch für $s = (4 - 2i)^2$.

  ☐ richtig ☐ falsch

- Für die Fouriertransformation gilt die Rechenregel

  $$(\mathcal{F}[f])'(\omega) = \mathcal{F}[f'](\omega).$$

  ☐ richtig ☐ falsch

- Sei y eine Lösung des AWPs

  $$y'' + 4y' + 2y = f, \; y(0) = 1, \; y'(0) = 0.$$

  Dann gilt für die Laplacetransformierte von y:

  $$(s^2 + 4s + 2)\mathcal{L}[y](s) = \mathcal{L}[f](s).$$

  ☐ richtig ☐ falsch

5. Aufgabe

6 Punkte

Gegeben ist die part. DGL im $\mathbb{R}^2$:

$$u_{xyx}(x, y) + u_{yyy}(x, y) = 0.$$

Welche Lösungen liefert der additive Trennungsansatz

$$u(x, y) = X(x) + Y(y) \; ?$$

6. Aufgabe

6 Punkte

Konstruieren Sie eine partielle Differentialgleichung, welche die beiden Funktionen $u_1(x, y) = \cos x$ und $u_2(x, y) = x + 5y$ als Lösungen besitzt.