Musterlösung Rechenteil

1. Aufgabe

11 Punkte

Bezeichnungen: $I(s) = \mathcal{L}[i](s)$ $E(s) = \mathcal{L}[e](s)$.
Anwenden der Laplace-Trafo auf das AWP liefert

$$\begin{aligned} 41\frac{1}{s}I(s) + 10I(s) + sI(s) &= E(s) \\ \Rightarrow \quad \frac{1}{s}(s^2+10s+41)I(s) &= E(s) \\ \Rightarrow \quad I(s) = \frac{s}{s^2+10s+41}E(s). \end{aligned}$$

Übertragungsfunktion von S: $H(s) := \frac{s}{s^2+10s+41}$.
Nullstellen von $s^2+10s+41$: $s_{1/2} = -5 \pm 4i$. Also

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{s}{(s+5)^2+16} = \frac{s}{(s+5)^2+4^2} \\ &= \frac{s+5}{(s+5)^2+4^2} - \frac{5}{(s+5)^2+4^2} \\ &= \mathcal{L}[\cos(4t)](s+5) - 5\mathcal{L}\left[\frac{1}{4}\sin(4t)\right](s+5) \\ &= \mathcal{L}[e^{-5t}\cos(4t)](s) - \mathcal{L}\left[\frac{5}{4}e^{-5t}\sin(4t)\right](s) \end{aligned}$$

und

$$h(t) = e^{-5t}(\cos(4t) - \frac{5}{4}\sin(4t))$$

ist die Impulsantwort von S.
Frequenzgang: $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $F(\omega) := H(i\omega) = \frac{i\omega}{-\omega^2+10i\omega+41}$.

2. Aufgabe

9 Punkte

Die Integralgleichung ist äquivalent zu

$$(f * f)(t) = e^{-(\frac{t}{5})^2}.$$

Anwenden der $\mathcal{F}$-Trafo liefert

$$\mathcal{F}[f*f](\omega) = \mathcal{F}[e^{-(\frac{t}{5})^2}](\omega) = 5\cdot\mathcal{F}[e^{-t^2}](5\omega) = 5\cdot\sqrt{\pi}e^{-\frac{(5\omega)^2}{4}}$$

$$\Rightarrow (\mathcal{F}[f](\omega))^2 = 5\cdot\sqrt{\pi}e^{-\frac{25\omega^2}{4}}$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}[f](\omega) \;=\; \pm\sqrt{5}\cdot\pi^{\frac{1}{4}}\cdot e^{-\frac{25\omega^2}{8}}.$$

Es gibt also zwei mögliche Lösungskurven für f. Mit f löst auch $-f$ die Integralgleichung.Wähle $F(\omega) = \sqrt{5}\cdot\pi^{\frac{1}{4}}\cdot e^{-\frac{25\omega^2}{8}}$. Dann folgt, dass

$$
\begin{aligned}
f(-t) &= \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}[F](t)\\
&= \frac{\sqrt{5}}{2\pi^{\frac{3}{4}}}\mathcal{F}[e^{-\frac{\omega^2}{\frac{8}{25}}}](t)\\
&= \frac{\sqrt{5}}{2\pi^{\frac{3}{4}}}\cdot\sqrt{\frac{8}{25}}\cdot\sqrt{\pi}\cdot e^{-\frac{2t^2}{25}}\\
&= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}\pi^{\frac{1}{4}}}\,e^{-\frac{2t^2}{25}}
\end{aligned}
$$

und damit

$$f(t) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}\pi^{\frac{1}{4}}}\,e^{-\frac{2t^2}{25}}.$$

3. Aufgabe

11 Punkte

Der Separationsansatz $u(x,t) = X(x)\cdot T(t)$ liefert:

$$\frac{1}{3}\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} =: -\lambda \in \mathbb{R}$$

1.) Lösen des RWP

$$\begin{cases} X'' = -\lambda X \\ X(0) = X(2) = 0 \end{cases}$$

a) $\lambda < 0:\ X(x) = c_2 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_3 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$. Mit den gegebenen Randbedingungen bekommen wir $c_2 = c_3 = 0 \implies X \equiv 0$.

b) $\lambda = 0:\ X(x) = c_2 x + c_0$. Mit den gegebenen Randbedingungen bekommen wir $c_2 = c_0 = 0 \implies X(x) = 0$.

c) $\lambda = k^2 > 0:\ X(x) = c_2\cos kx + c_3 \sin kx$ Mit $X(0) = 0$ folgt $c_2 = 0$ und mit $X(2) = 0$ folgt $c_3\sin(2x) = 0 \Rightarrow k = \frac{n\pi}{2},\ n \in \mathbb{N}$. Also $X_n(x) = \sin(\frac{n\pi}{2}x),\ n \in \mathbb{N}$.

2.) Mit $\lambda = (\frac{n\pi}{2})^2$ lösen wir die Gleichung $T' = -3(\frac{n\pi}{2})^2 T$ und das führt zu

$$T_n(t) = A_n \cdot e^{-\frac{3}{4}n^2\pi^2 t},\ n \in \mathbb{N},\ A_n \in \mathbb{R}$$

Damit haben wir die Lösungen

$$u_n(x,t) = A_n \cdot \sin(\frac{n\pi}{2}x)\cdot e^{-\frac{3}{4}n^2\pi^2 t}\ n \in \mathbb{N},\ A_n \in \mathbb{R}.$$

Superpositionsprinzip

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \sin(\frac{n\pi}{2}x) \cdot e^{-\frac{3}{4}n^2\pi^2 t}.$$

Anpassen der Anfangsbedingung $u(x,0) = 4\sin(6\pi x)$ führt zu $A_{12} = 4$ und für alle anderen $A_n = 0$. Die Lösung lautet also

$$u(x,t) = 4\sin(6\pi x) \cdot e^{-108\pi^2 t}.$$

4. Aufgabe

9 Punkte

Anwenden der Fouriertransformation liefert:

$$\text{(DGL)} \;\Leftrightarrow\; U_t(\omega,t) = -4\omega^2 U(\omega,t) + i\omega U(\omega,t)$$

und

$$\text{(AW)} \;\Leftrightarrow\; U(\omega,0) = \mathcal{F}[e^{-\frac{1}{4}x^2}](\omega) = \sqrt{4\pi} \cdot e^{-\omega^2}.$$

Lösungsgesamtheit der DGL: $U(\omega,t) = A_\omega \cdot e^{(i\omega-4\omega^2)t}$

Anpassen des Anfangswerts: $A_\omega = \sqrt{4\pi} \cdot e^{-\omega^2}$.

Also lautet die Lösung des neuen AWPs: $U(\omega,t) = \sqrt{4\pi} \cdot e^{-\omega^2} \cdot e^{(i\omega-4\omega^2)t}$.