Musterlösung Verständnisteil

6 Es gilt: f ist S-Funktion $\Leftrightarrow |x^k \cdot f^{(n)}(x)| \to 0$ für $|x| \to \infty$ und für alle $n, k \in \mathbb{N}_0$.

a) Es gilt $f_1(x) \to 1$ für $|x| \to \infty$. Also ist f_1 keine S-Funktion.

b) $f_2^{(n)}(x) = P_n(x) \cdot e^{-1-x^2}$ mit P_n Polynom. Also folgt

$$|x^k \cdot f_2^{(n)}(x)| = |x^k \cdot P_n(x) \cdot e^{-1-x^2}| \to 0$$

für $|x| \to \infty$. Also ist f_2 eine S-Funktion.

7

- Da $t \mapsto t$ stetig und f stückweise stetig ist ist auch $tf(t)$ stückweise stetig. Außerdem ist f von exponentieller Ordnung, d.h. es existieren Konstanten C, γ, so dass für alle $t \geq 0$ gilt $|f(t)| \leq C \cdot e^{\gamma t}$. Damit ist

$$|tf(t)| \leq t \cdot C \cdot e^{\gamma t} = C \cdot e^{\log t + \gamma t} \leq C \cdot e^{(\gamma+1)t}.$$

  Also ist auch $tf(t)$ von exponentieller Ordnung.

- Es gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[tf(t)](s) &= \int_0^\infty t \cdot f(t) \cdot e^{-st}\,dt = -\int_0^\infty f(t) \cdot \frac{d}{ds} e^{-st}\,dt \\ &= -\frac{d}{ds}\int_0^\infty f(t) \cdot e^{-st}\,dt = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}[f(t)](s).\end{aligned}$$

- Wähle $f(t) \equiv 1$. Dann ist f von exp. Ordnung und es gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[t](s) = \mathcal{L}[t \cdot 1](s) = \mathcal{L}[tf(t)](s) &= -\frac{d}{ds}\mathcal{L}[f(t)](s) \\ &= -\frac{d}{ds}\mathcal{L}[1](s) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{s^2}.\end{aligned}$$

8 1. Weg: Es gilt $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ und $\Gamma(m+1) = m \cdot \Gamma(m)$. Damit folgt für $m \in \mathbb{N}$

$$\Gamma(m + \frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}(2m)!}{2^{2m} \cdot m!}.$$

Eingesetzt in die Reihendarstellung liefert das

$$\begin{aligned}
J_{-1/2}(x) &= \left(\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma(m+1)\Gamma(m+\frac{1}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m} \\
&= \left(\frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \cdot 2^{2m} \cdot m!}{m! \cdot \sqrt{\pi}(2m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m} \\
&= \sqrt{\frac{2}{x\pi}} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} \cdot x^{2m} \\
&= \sqrt{\frac{2}{x\pi}} \cdot \cos(x).
\end{aligned}$$

<u>2. Weg:</u> Es gilt

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{2}{x\pi}} \cdot \cos(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} \cdot x^{2m-\frac{1}{2}} \\
&\longrightarrow \infty, \qquad x \to 0.
\end{aligned}$$

Also ist $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{\frac{2}{x\pi}} \cdot \cos(x)$ unbeschränkt. Außerdem gilt

$$\left(\sqrt{\tfrac{2}{x\pi}} \cdot \cos(x)\right)' = -\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{2}{\pi}}x^{-\frac{3}{2}} \cdot \cos x - \sqrt{\tfrac{2}{x\pi}} \cdot \sin x$$

und

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{\tfrac{2}{x\pi}} \cdot \cos(x)\right)'' &= \tfrac{3}{4}\sqrt{\tfrac{2}{\pi}}x^{-\frac{5}{2}} \cdot \cos x + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{2}{\pi}}x^{-\frac{3}{2}} \cdot \sin x \\
&\quad + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{2}{\pi}}x^{-\frac{3}{2}} \cdot \sin x - \sqrt{\tfrac{2}{x\pi}} \cdot \cos x
\end{aligned}$$

Eingesetzt in die DGL liefert das

$$\begin{aligned}
& x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y \\
= \; & \tfrac{3}{4}\sqrt{\tfrac{2}{\pi}}x^{-\frac{1}{2}} \cdot \cos x + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{2}{\pi}}x^{\frac{1}{2}} \cdot \sin x \; + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{2}{\pi}}x^{\frac{1}{2}} \cdot \sin x - \sqrt{\tfrac{2}{\pi}} \cdot x^{\frac{3}{2}} \cdot \cos x \\
& -\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{2}{\pi}}x^{-\frac{1}{2}} \cdot \cos x - \sqrt{\tfrac{2}{\pi}} \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot \sin x + \sqrt{\tfrac{2}{\pi}} \cdot x^{\frac{3}{2}} \cdot \cos x - \tfrac{1}{4}\sqrt{\tfrac{2}{x\pi}} \cdot \cos x \\
= \; & 0.
\end{aligned}$$

Da $J_{-1/2}(x)$ die einzige Lösung der zugehörigen Bessel-DGL ist, deren Grenzwert für $x \to 0$ unbeschränkt ist, muss gelten

$$J_{-1/2}(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi x}} \cdot \cos x.$$

7 $\vec{y}_1$ löst das AWP, denn es gilt

$$\frac{d}{dx}\vec{y}_1(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + 2e^{2x}\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\vec{y}_1(x) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{4} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}e^{2x} \\ -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}e^{2x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{2x} \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{2x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{2x} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{2x} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und $\vec{y}_1(0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \vec{0}$.

$\vec{y}_2$ ist keine Lösung, denn es gilt $\vec{y}_2(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$.

6 z.B. $u(x, y, t) \equiv 2$.

6 Die Fourierreihe S einer Funktion f mit Periode T hat die Gestalt

$$s(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\frac{2\pi}{T}x) + b_k \sin(k\frac{2\pi}{T}x)$$

mit $a_k = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos(k\frac{2\pi}{T}x)\,dx$ und $b_k = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\sin(k\frac{2\pi}{T}x)\,dx$ für $k = 0, 1, 2, \ldots$.

- f_1 ist gerade $\Rightarrow b_k = 0$ für alle k im Widerspruch zu $b_k = 2\frac{(-1)^k}{k}$ für $k \geq 1$.
- f_2 ist π-periodisch, also $T = \pi$. Und f_2 ist ungerade also gilt

$$s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(2kx).$$

Andererseits gilt $s(x) = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}\sin(kx)$. Ein Koeffizientenvergleich liefert einen Widerspruch für alle ungeraden k, da $b_k = 0$ und $b_k = 2\frac{(-1)^k}{k}$ gelten muss.

- f_3 ist ungerade und 2π-periodisch, also gilt

$$s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx).$$

  Damit kommt f_3 für die Fourierreihe in Beracht.