Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik WS 06/07
Prof. Dr. Ferus 21. Februar 2007

Februar – Klausur (Rechenteil)
Integraltransformationen und partielle Differentialgleichungen für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen ist nur die Laplacetabelle zugelassen. Taschenrechner und Formelsammlungen sind nicht zugelassen. Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Rechenaufgaben. Geben Sie immer den **vollständigen Rechenweg** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

Die Gesamtklausur ist mit 40 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 12 von 40 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	4	Σ

1. Aufgabe

8 Punkte

Lösen Sie das Differentialgleichungssystem

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \vec{y}(t) \quad .$$

2. Aufgabe

12 Punkte

In einem elektrischen Stromkreis erfüllen die Ströme $i_1(t), i_2(t)$ und $i_3(t)$ die Gleichungen

$$\begin{aligned} 2i_1(t) + 6q_2(t) &= u(t) \\ -6q_2(t) + 2i_3(t) + 2i_3'(t) &= 0 \\ -i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) &= 0. \end{aligned}$$

Es ist $q_2(t) := \int_0^t i_2(\tau)\,\mathrm{d}\tau$.

Für $t \leq 0$ fließt kein Strom: $i_1(t) = i_2(t) = i_3(t) = 0$. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird eine Spannung $u(t)$ eingeschaltet.

Man betrachtet den Strom $i_3(t)$ als Antwort des Stromkreises auf das Signal $u(t)$. Wie lauten dann die Übertragungsfunktion und die Impulsantwort des Stromkreises?

3. Aufgabe

10 Punkte

Lösen Sie mit Hilfe des Separationsansatzes das Anfangswert- und Randproblem in $u(x,t)$:

$$\begin{aligned} u_t &= 9u_{xx} \quad (0 \leq x \leq \pi) \\ u(x,0) &= -1 - 2\cos 2x \quad (0 \leq x \leq \pi), \\ u_x(0,t) &= 0, \\ u_x(\pi,t) &= 0. \end{aligned}$$

4. Aufgabe

10 Punkte

Lösen Sie das Randwertproblem

$$\begin{aligned} \Delta u(x,y) &= 0 \text{ für } x^2 + y^2 < 1, \\ u(x,y) &= y^3 + 2x^2 y \text{ für } x^2 + y^2 = 1, \end{aligned}$$

indem Sie ebene Polarkoordinaten (r,φ) und in geeigneter Weise die Ansatzfunktionen $r^{|l|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}l\varphi}, \quad l \in \mathbb{Z}$, verwenden. Geben Sie u als Funktion von r und φ an.

Hinweise: Der Laplaceoperator in Polarkoordinaten lautet $\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$. Es gilt die Identität $\sin^3\varphi = \frac{1}{4}(3\sin\varphi - \sin 3\varphi)$.