Musterlösung Verständnisteil — ITPDG, 21. Februar 2007

1. Aufgabe

8 Punkte

Separation der Variablen ergibt

$$\begin{aligned} \int \frac{\mathrm{d}y}{1+y^2} &= -\int \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x \\ \implies \arctan y &= -\mathrm{e}^x + C \\ \implies y &= \tan(-\mathrm{e}^x + C) \qquad \boxed{\textbf{3 P.}} \end{aligned}$$

mit einer Konstanten C.

$y(0) = 0$ führt zu $C = 1$; also

$$y(x) = \tan(1 - \mathrm{e}^x). \qquad \boxed{\textbf{2 P.}}$$

Der maximale Definitionsbereich wird durch die Pole von tan bestimmt, es muss gelten

$$\begin{aligned} -\tfrac{\pi}{2} < 1 - \mathrm{e}^x &< \tfrac{\pi}{2} \\ -\tfrac{\pi}{2} - 1 < -\mathrm{e}^x &< \tfrac{\pi}{2} - 1 \\ \tfrac{\pi}{2} + 1 > \mathrm{e}^x &> -\tfrac{\pi}{2} + 1 \\ \implies x \in \left]-\infty, \ln\left(\tfrac{\pi}{2} + 1\right)\right[. & \qquad \boxed{\textbf{3 P.}} \end{aligned}$$

($\pi/2 \approx 1,57$; die reelle Exponentialfunktion ist stets positiv.)

2. Aufgabe

12 Punkte

Die homogene DGL besitzt das charakteristische Polynom $\lambda^2 - \lambda - 2$, das die Nullstellen -1 und 2 hat. Folglich lautet die homogene Lösung

$$y_{\text{hom}} = C_1 \mathrm{e}^{-x} + C_2 \mathrm{e}^{2x}. \qquad \boxed{\textbf{3 P.}}$$

Für eine partikuläre Lösung benutzen wir die Methode der Variation der Konstanten. Die Gleichung

$$\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-x} & \mathrm{e}^{2x} \\ -\mathrm{e}^{-x} & 2\mathrm{e}^{2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$$

hat nach etwas Gauß die Lösungen

$$C_1'(x) = -\frac{1}{3} x \mathrm{e}^{x}, \quad C_2'(x) = \frac{1}{3} x \mathrm{e}^{-2x}. \qquad \boxed{\textbf{4 P.}}$$

Durch partielle Integration leitet man schnell die Formel

$$\int x\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x = \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2}\right)\mathrm{e}^{ax} + C$$

her. Damit findet man die Funktionen

$$C_1(x) = -\frac{1}{3}(x-1)\mathrm{e}^{x} + c_1, \quad C_2(x) = \frac{1}{3}\left(-\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right)\mathrm{e}^{-2x} + c_2. \quad \boxed{\textbf{2 P.}}$$

Die Konstanten c_1, c_2 sind frei wählbar (sie führen ohnehin zur homogenen Lösung), wir setzen sie gleich 0 und haben schließlich als eine partikuläre Lösung

$$\begin{aligned} y_{\mathrm{p}}(x) &= C_1(x)\mathrm{e}^{-x} + C_2(x)\mathrm{e}^{2x} \\ &= -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}. \quad \boxed{\textbf{2 P.}} \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung lautet dann

$$y_{\mathrm{allg}}(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + C_1\mathrm{e}^{-x} + C_2\mathrm{e}^{2x}. \quad \boxed{\textbf{1 P.}}$$

3. Aufgabe

6 Punkte

Dieses Integral stellt eine Faltung dar, die an der Stelle 1 ausgewertet wird:

$$\int_0^1 x^p(1-x)^q\,\mathrm{d}x = \int_0^t u^p(t-u)^q\,\mathrm{d}u\Big|_{t=1} = (t^p * t^q)\Big|_{t=1} \quad \boxed{\textbf{2 P.}}$$

Dann ist mit

$$\mathcal{L}[(t^p * t^q)](s) = \frac{p!\,q!}{s^{p+q+2}} = \mathcal{L}\left[\frac{p!q!}{(p+q+1)!}t^{p+q+1}\right] \quad \boxed{\textbf{2 P.}}$$

und dem Satz von Lerch

$$\int_0^t u^p(1-u)^q\,\mathrm{d}u\Big|_{t=1} = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}t^{p+q+1}\Big|_{t=1} = \frac{p!q!}{(p+q+1)!} \quad \boxed{\textbf{2 P.}}$$

4. Aufgabe

6 Punkte

a) Es gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[g](\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{0}^{\infty} g(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t + \int_{-\infty}^{0} g(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Mit der Substitution $t = -u$ und $g(-u) = -g(u)$ ist dann

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[g](\omega) &= \int_{0}^{\infty} g(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{\infty} g(-u)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega u}\,\mathrm{d}u \\ &= \int_{0}^{\infty} g(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t - \int_{0}^{\infty} g(u)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega u}\,\mathrm{d}u \\ &= \mathcal{L}[g](\mathrm{i}\omega) - \mathcal{L}[g](-\mathrm{i}\omega). \quad \boxed{\textbf{3 P.}}\end{aligned}$$

Wörtlich aus einer Hausaufgabe übernommen.

b) Die Funktion $\mathrm{e}^{-|t|}\sin t$ ist ungerade, die obige Identität läßt sich anwenden. Die ausgegebene Tabelle ergibt für die Laplace-Transformierte den Ausdruck

$$\mathcal{L}[\mathrm{e}^{-|t|}\sin t](s) = \frac{1}{(s+1)^2+1}.$$

Weil nur für $\operatorname{Re} t \geq 0$ die Laplace-Transformierten existieren, gilt die Identität $|t| = t$.

Für die Fourier-Transformierte ergibt sich:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[\mathrm{e}^{-|t|}\sin t\right](\omega) &= \frac{1}{(1+\mathrm{i}\omega)^2+1} - \frac{1}{(1-\mathrm{i}\omega)^2+1} \\ &= \frac{1}{2-\omega^2+2\mathrm{i}\omega} - \frac{1}{2-\omega^2-2\mathrm{i}\omega} \\ &= -\frac{4\mathrm{i}\omega}{(2-\omega^2)^2+4\omega^2} \\ &= -\frac{4\mathrm{i}\omega}{4+\omega^4} \quad \boxed{\textbf{3 P.}}\end{aligned}$$

5. Aufgabe

8 Punkte

a) Wahr.
DGL wird zur Identität, der Anfangswert wird richtig getroffen. Zur Einzigkeit die DGL nach y' auflösen:

$$y' = \mathrm{e}^{1+x-y}.$$

Die rechte Seite ist auf ganz $\mathbb{R}^2$ differenzierbar. Damit ist die vorgegebene Lösung nach dem EES die einzige.

b) Aufgrund eines Druckfehlers in der angegebenen DGL ist die Aufgabe falsch gestellt. Jedem Teilnehmer werden hierfür 2 Punkte gegeben.

c) Wahr. Es ist

$$\begin{aligned} x^n \mathcal{L}[f](x) = x^n \int_0^\infty \mathrm{e}^{-xt} f(t)\,\mathrm{d}t \le x^n \int_0^\infty \mathrm{e}^{-xt} |f(t)|\,\mathrm{d}t \le x^n \int_0^\infty \mathrm{e}^{-xt} M t^n\,\mathrm{d}t \\ = M x^n \cdot \frac{n!}{x^{n+1}} = \frac{Mn!}{x}, \\ \implies \lim_{x\to\infty} x^n \mathcal{L}[f](x) \le \lim_{x\to\infty} \frac{Mn!}{x} = 0. \end{aligned}$$

Mit dem Satz $\lim_{x\to\infty} \mathcal{L}[f](x) = 0$ folgt die Behauptung.

d) Falsch.
Ein Gegenbeispiel ist die Spaltfunktion si, die die Bandbreite 1 hat. Das Produkt $t\,\mathrm{si}(t)$, welches gleich $\sin t$ ist, fällt im Unendlichen nicht ab.