Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik WS 06/07
Prof. Dr. Ferus 11. April 2007

April – Klausur (Rechenteil)
Integraltransformationen und partielle Differentialgleichungen für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen ist nur die Laplacetabelle zugelassen. Taschenrechner und Formelsammlungen sind nicht zugelassen. Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Rechenaufgaben. Geben Sie immer den **vollständigen Rechenweg** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

Die Gesamtklausur ist mit 40 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 12 von 40 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	4	Σ

1. Aufgabe 8 Punkte

Lösen Sie das Differentialgleichungssystem

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \vec{y}(t) \quad .$$

2. Aufgabe 12 Punkte

In einem elektrischen Stromkreis erfüllen die Ströme $i_1(t), i_2(t)$ und $i_3(t)$ die Gleichungen

$$\begin{aligned} 18i_1(t) + 18q_2(t) &= u(t) \\ -18q_2(t) + 10i_3(t) + 2i_3'(t) &= 0 \\ -i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) &= 0. \end{aligned}$$

Es ist $q_2(t) := \int_0^t i_2(\tau)\,\mathrm{d}\tau$.

Für $t \leq 0$ fließt kein Strom: $i_1(t) = i_2(t) = i_3(t) = 0$. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird eine Spannung $u(t)$ eingeschaltet.

Man betrachtet den Strom $i_3(t)$ als Antwort des Stromkreises auf das Signal $u(t)$. Wie lauten dann die Übertragungsfunktion und die Impulsantwort des Stromkreises?

3. Aufgabe 10 Punkte

Lösen Sie mit Hilfe des Separationsansatzes das Anfangswert- und Randproblem in $u(x,t)$:

$$u_{xx} - \frac{1}{2}u_t = 0, \qquad 0 \leq x \leq \pi$$
$$u(0,t) = 0, \qquad u(\pi,t) = 0, \qquad u_t(x,0) = 8\sin 2x.$$

4. Aufgabe 10 Punkte

Lösen Sie das Randwertproblem

$$\begin{aligned} \Delta u(x,y,z) &= 0 \qquad (*) \qquad && \text{für } x^2+y^2+z^2 < 4, \\ u(x,y,z) &= 1 + z + 5z^3 && \text{für } x^2+y^2+z^2 = 4, \end{aligned}$$

indem Sie Polarkoordinaten (r, ϑ, φ) und in geeigneter Weise die Ansatzfunktionen $u_k(r,\vartheta) := r^k P_k(\cos\vartheta)$, $\quad k \in \mathbb{N}_0$, verwenden. Warum ist es sinnvoll, diese Ansatzfunktionen als von φ unabhängig zu wählen? Geben Sie u als Funktion von r und von Legendre-Polynomen $P_n(\cos\vartheta)$ an.

Hinweise: Sie brauchen *nicht* zu beweisen, dass die Ansatzfunktionen die Potentialgleichung $(*)$ erfüllen. In Polarkoordinaten ist
$x = r\sin\vartheta\cos\varphi, \quad y = r\sin\vartheta\sin\varphi, \quad z = r\cos\vartheta.$

Die ersten vier Legendre-Polynome lauten
$P_0(t) = 1, \quad P_1(t) = t, \quad P_2(t) = \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}, \quad P_3(t) = \frac{5}{2}t^3 - \frac{3}{2}t.$