Musterlösung Rechenteil — ITPDG, 11. April 2007

1. Aufgabe

8 Punkte

Aus

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(3-\lambda)^2(2-\lambda) - (2-\lambda) = 0$$

$$((3-\lambda)^2 - 1)(2-\lambda) = 0$$

$$(2-\lambda)(4-\lambda)(2-\lambda) = 0$$

$$(2-\lambda)^2(4-\lambda) = 0$$

ergeben sich die Eigenwerte $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ und $\lambda_3 = 4$. $\boxed{\textbf{2 P.}}$

Eigenraum zu $\lambda_{1,2} = 2$ ist span $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Eigenraum zu $\lambda_3 = 4$ ist span $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, $\boxed{\textbf{3 P.}}$

Für jeden Eigenwert sind algebraische und geometrische Vielfachheit gleich. Damit können wir drei linear unabhängige Lösungen schnell anschreiben:

$$\vec{y}_1(t) == \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{y}_2(t) = \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\vec{y}_3(t) = \mathrm{e}^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und die allgemeine Lösung lautet

$$\vec{y}(t) = c_1\vec{y}_1(t) + c_2\vec{y}_1(t) + c_3\vec{y}_1(t), \qquad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C} \quad \boxed{\textbf{3 P.}}$$

2. Aufgabe

12 Punkte

Bezeichnungen: $I_n(s) = \mathcal{L}[i_n](s)$ für $n = 1, 2, 3$, $\quad U(s) = \mathcal{L}[u](s)$.
Anwenden der Laplace-Trafo auf das AWP liefert

$$\begin{aligned} 18I_1(s) + \frac{18}{s}I_2(s) &= U(s) \\ -\frac{18}{s}I_2(s) + 10I_3(s) + 2sI_3(s) &= 0 \\ -I_1(s) + I_2(s) + I_3(s) &= 0 \quad \boxed{\textbf{3 P.}} \end{aligned}$$

Mit der Laplace-Trafo der Ableitung $i_3'(t)$ wird die Anfangsbedingung $i_3(0) = 0$ korrekt berücksichtigt. $\boxed{\textbf{1 P.}}$

Auflösen des linearen Gleichungssystems nach I_3 liefert $\boxed{\textbf{4 P.}}$

$$I_3(s) = \frac{1}{2(s^2 + 6s + 14)}U(s).$$

Nachrichtlich:

$$I_1(s) = \frac{s^2 + 5s + 9}{18(s^2 + 6s + 14)}U(s), \qquad I_2(s) = \frac{s^2 + 5s}{18(s^2 + 6s + 14)}U(s)$$

Also hat man für die Übertragungsfunktion: $H(s) = \frac{1}{2(s^2+6s+14)}$. $\boxed{\textbf{1 P.}}$

Für die Impulsantwort $h(t)$ braucht man das Urbild von H unter $\mathcal{L}$. Rücktransformation von $H(s)$ ergibt mit $s^2 + 6s + 14 = (s + 3)^2 + 5$

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{1}{2((s+3)^2 + 5)} \\ &= \frac{3}{2}\mathcal{L}\left[\frac{1}{2\sqrt{5}}\mathrm{e}^{-3t}\sin\left(\sqrt{5}t\right)\right] \end{aligned}$$

Für die Impulsantwort $h(t)$ hat man also

$$h(t) = \frac{1}{2\sqrt{5}}\mathrm{e}^{-3t}\sin\left(\sqrt{5}t\right). \quad \boxed{\textbf{3 P.}}$$

3. Aufgabe

10 Punkte

$$\begin{aligned} u_{xx} - \frac{1}{2}u_t &= 0 \quad (0 \le x \le \pi) \\ u(0,t) &= 0, \\ u(\pi,t) &= 0, \\ u_t(x,0) &= 8\sin 2x \quad (0 \le x \le \pi). \end{aligned}$$

Ansatz: $u(x,t) = X(x)T(t) \implies 2X''(x)T(t) = X(x)T'(t) \implies \frac{T'(t)}{2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$.
Die linke Seite ist nur von t abhängig, und die rechte nur von x, also sind die beiden Seiten konstant ($= -\lambda$). Das liefert die folgenden DGLn:

$$\begin{aligned} T'(t) &= -2\lambda T(t), \\ X''(x) &= -\lambda X(x),\ X(0) = X(\pi) = 0. \quad \boxed{\textbf{2 P.}} \end{aligned}$$

Für $T(t)$ bekommen wir

$$T(t) = c_1 \mathrm{e}^{-2\lambda t}. \quad \boxed{\textbf{1 P.}}$$

Nun die Fallunterscheidungen für mögliche Werte von λ:

a) $\lambda < 0:\ X(x) = c_2\mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda}x}+c_3\mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda}x}$. Mit den gegebenen Randbedingungen bekommen wir $c_2 = c_3 = 0 \implies X(x) = 0.$ $\boxed{\textbf{1 P.}}$

b) $\lambda = 0:\ X(x) = c_2x+c_0$. Mit den gegebenen Randbedingungen bekommen wir $c_2 = c_3 = 0 \implies X(x) = 0.$ $\boxed{\textbf{1 P.}}$

c) $\lambda = k^2 > 0:\ X(x) = c_2\cos kx + c_3 \sin kx, X(0) = 0 \implies c_2 = 0.$

$X(\pi) = c_3 \sin k\pi = 0 \implies c_3 = 0$ oder $k = n,\ n \in \mathbb{N}, n > 0.$ $\boxed{\textbf{2 P.}}$

Also haben wir zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine Lösung

$$u_n(x,t) = a_n\mathrm{e}^{-2n^2t}\sin nx,$$

und mit Superposition erhalten wir

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\mathrm{e}^{-2n^2t}\sin nx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\mathrm{e}^{-2n^2t}\sin nx. \quad \boxed{\textbf{1 P.}}$$

Jetzt müssen wir die Koeffizienten a_n so wählen, dass diese Lösung die Anfangsbedingung erfüllt:

$$u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty}(-2n^2a_n)\sin nx. = 8\sin 2x \quad (0 \le x \le \pi),$$

Damit folgt

$$a_2 = -1 \quad \text{und} \quad a_n = 0 \text{ für } n \in \mathbb{N} \setminus \{2\}.$$

Mit diesen Koeffizienten bekommen wir die Lösung des AWPs:

$$u(x,t) = -\mathrm{e}^{-8t} \sin 2x. \quad \boxed{\textbf{2 P.}}$$

4. Aufgabe

10 Punkte

Die Randfunktion schreibt sich in Polarkoordinaten als

$$1 + z + 5z^3 = 1 + 2\cos\vartheta + 40\cos^3\vartheta, \quad \boxed{\textbf{2 P.}}$$

und ist damit von φ unabhängig. Somit braucht in den Ansatzfunktionen die Variable φ nicht aufzutauchen (*azimutale Symmetrie*). $\boxed{\textbf{1 P.}}$

Wenn dieser Ansatz zu einer Lösung führt, so hat man auch *die* Lösung des RWP, da die Potentialgleichung bei vorgegebenen Randwerten eindeutig lösbar ist.

Der Ansatz lautet

$$u(r\sin\vartheta\cos\varphi, r\sin\vartheta\sin\varphi, r\cos\vartheta) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k r^k P_k(\cos\vartheta) \quad \boxed{\textbf{1 P.}}$$

mit $r = 2$. Weil die Randfunktion ein Polynom 3. Grades ist, geht die Summation nur bis $k = 3$. Dann ist

$$1 + 2\cos\vartheta + 40\cos^3\vartheta = c_0 + 2c_1P_1(\cos\vartheta) + 4c_2P_2(\cos\vartheta) + 8c_3P_3(\cos\vartheta).$$

P_3 hat als höchsten Koeffizienten $\frac{5}{2}$, also ist $c_3 = 2$. $\boxed{\textbf{1 P.}}$

Es bleibt

$$1 + 2\cos\vartheta = c_0 + 2c_1P_1(\cos\vartheta) + 4c_2P_2(\cos\vartheta) - 24\cos\vartheta.$$

Weil kein $\cos^2\vartheta$ vorkommt, kann nur $c_2 = 0$ gelten. $\boxed{\textbf{1 P.}}$

Schließlich ist

$$1 + 2\cos\vartheta = c_0 + (2c_1 - 24)\cos\vartheta,$$

woraus man $c_0 = 1$ und $c_1 = 13$ abliest. $\boxed{\textbf{2 P.}}$

Der für u gemachte Ansatz führt auf

$$u(r\sin\vartheta\cos\varphi, r\sin\vartheta\sin\varphi, r\cos\vartheta) = P_0(\cos\vartheta) + 13rP_1(\cos\vartheta) + 2r^3P_3(\cos\vartheta).$$

$\boxed{\textbf{2 P.}}$