Musterlösung Verständnisteil — ITPDG, 11. April 2007

1. Aufgabe

8 Punkte

Separation der Variablen ergibt

$$\begin{aligned} y' \mathrm{e}^{-y} &= -\cos x \\ \int \mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y &= -\int \cos x\,\mathrm{d}x \\ \implies \quad -\mathrm{e}^{-y} &= -\sin x + C \\ \implies \quad y &= -\ln(\sin x - C) \qquad \boxed{\textbf{3 P.}} \end{aligned}$$

mit einer Konstanten C.

$y(0) = 0$ führt zu $C = -1$; also

$$y(x) = -\ln(1 + \sin x). \qquad \boxed{\textbf{2 P.}}$$

Der maximale Definitionsbereich wird durch die Polstelle 0 des ln bestimmt, es muss gelten

$$\begin{aligned} \sin x &\neq -1 \\ x &\neq -\tfrac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Die größtmögliche Umgebung der Anfangsstelle 0 ist also $]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$, auf der die gefundene Lösung y definiert ist. $\boxed{\textbf{3 P.}}$

2. Aufgabe

11 Punkte

Einsetzen des Ansatzes $y = \sum_k a_k x^k$ in die DGL ergibt

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2}(x^2-1) - 6a_k x^k\right) + 6x = 0$$

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} [k(k-1)-6]a_k x^k - k(k-1)a_k x^{k-2}\right) + 6x = 0$$

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \{[k(k-1)-6]a_k - (k+2)(k+1)a_{k+2}\} x^k\right) + 6x = 0$$

$$\boxed{\textbf{3 P.}}$$

Koeffizientenvergleich führt zu den Aussagen

$$k = 0, 2, 3, \ldots : [k(k-1)-6]a_k = (k+2)(k+1)a_{k+2} \tag{R}$$

$$k = 1 : -6a_3 - 6a_1 + 6 = 0. \qquad \boxed{\textbf{2 P.}}$$

Die Anfangsbedingungen $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$ bedeuten $a_0 = 0, a_1 = 2$. Wir arbeiten jetzt $k = 0, 1, 2, 3$ durch:

$$\begin{aligned} k = 0: &\quad -6a_0 = 2a_2 \implies a_2 = 0 \\ k = 1: &\quad -6a_3 - 12 + 6 = 0 \implies a_3 = -1 \\ k = 2: &\quad -4a_2 = 12a_4 \implies a_4 = 0 \\ k = 3: &\quad 0 = 20a_5 \implies a_5 = 0 \end{aligned}$$

Die Faktoren $k(k-1)$ und $(k+2)(k+1)$ in der Rekursion (R) sind für $k \geq 4$ verschieden von 0. Damit sind die Zahlen $a_6, a_8, \ldots$ proportional zu a_4 und die Zahlen $a_7, a_9, \ldots$ proportional zu a_5. Wegen $a_2 = 0$ ist $a_4 = 0$. Zusammen mit $a_5 = 0$ verschwinden dann *alle* a_k mit $k \geq 4$.

4 P.

Als Lösung ergibt sich

$$y = 2x - x^3. \qquad \boxed{\textbf{2 P.}}$$

3. Aufgabe

8 Punkte

Laplace-Transformation der IGL ergibt die DGL

$$(F(s))^2 = -F'(s) \qquad \boxed{\textbf{3 P.}}$$

für die Laplacetransformierte $F(s) := \mathcal{L}[f](s)$.

Eine Lösung der DGL ist $F = 0$, damit ist $f = 0$ eine Lösung der IGL. **1 P.**

Sonst folgt mit $F(s) \neq 0$

$$\begin{aligned} 1 &= -\frac{F'(s)}{(F(s))^2} \\ \implies s + C &= \frac{1}{F(s)}, \quad C \in \mathbb{R} \\ \implies \frac{1}{s+C} &= F(s), \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2 P.

Von der ersten zur zweiten Zeile wurden die Stammfunktionen aufgesucht. Man erhält für f also

$$f(t) = \mathrm{e}^{-Ct}. \qquad \boxed{\textbf{2 P.}}$$

Die Lösungen der IGL sind somit 0 und e^{-Ct} für alle $C \in \mathbb{R}$.

4. Aufgabe

5 Punkte

a) Der Umkehrsatz lautet

$$\mathcal{F}[\,\mathcal{F}[g]\,](\omega) = 2\pi g(-\omega).$$

Für die linke Seite wendet man die vorgegebene Eigenschaft

$$\mathcal{F}[g](\omega) = \sqrt{2\pi}g(\omega) \tag{E}$$

zweimal an:

$$\mathcal{F}[\,\mathcal{F}[g]\,](\omega) = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}[g](\omega) = 2\pi g(\omega).$$

Es ist also

$$2\pi g(\omega) = 2\pi g(-\omega) \implies g(\omega) = g(-\omega),$$

damit ist g gerade. $\boxed{\textbf{4 P.}}$

b) Ein Beispiel ist

$$g(t) = \mathrm{e}^{-t^2/2}, \qquad \mathcal{F}[g](\omega) = \sqrt{2\pi}g(\omega). \quad \boxed{\textbf{1 P.}}$$

5. Aufgabe

8 Punkte

a) Falsch.

Es genügt *eine* der beiden Begründungen (α) und (β).

(α) Mit $y(0) = 0$ gehört der Punkt $(0, 0)$ zu allen Lösungskurven.
Um den EES überhaupt anwenden zu können, schreibt man die DGL für $x \neq 0$ um:

$$y' = \tan\left(\frac{\pi}{4}\frac{y}{x}\right),$$

Die rechte Seite ist im Anfangspunkt $(0, 0)$ nicht differenzierbar, damit greift der EES gar nicht.

(β) Es gibt noch (mindestens) zwei weitere Lösungen: $y = 0$ und $y = -x$.

b) Falsch.
Das charakteristische Polynom der vorgegebenen DGL lautet $\lambda^3 - 2\lambda^2 + 1$.

c) Wahr.
Fouriertransformation und Faltungssatz ergeben die Gleichheit

$$\mathcal{F}[f * (g * h)] = \mathcal{F}[f]\mathcal{F}[g]\mathcal{F}[h] = \mathcal{F}[(f * g) * h],$$

mit der inversen Fourier-Transformation folgt

$$f * (g * h) = (f * g) * h.$$

d) Falsch.
Das ist nur ein *Ansatz*, mit dem man durch Superposition sehr viele Lösungen gewinnen kann. Aber man bekommt damit beispielsweise nicht die Lösung $u(x, y) = x^2 - y^2$.

Diese einfache Lösung findet man durch einen anderen Ansatz, nämlich $u(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$; hier ist $R(r) = r^2$, $\Phi(\varphi) = \cos 2\varphi$.