Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik SS 08
Prof. Dr. Schief 23. Juli 2008

Juli – Klausur (Rechenteil)
Integraltransformationen und partielle Differentialgleichungen für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen ist nur die Laplacetabelle zugelassen. Taschenrechner und Formelsammlungen sind nicht zugelassen. Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Rechenaufgaben. Geben Sie immer den **vollständigen Rechenweg** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

Die Gesamtklausur ist mit 40 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 12 von 40 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	4	Σ

1. Aufgabe

11 Punkte

Ermitteln Sie die allgemeine Lösung $\vec{y}(t)$ des reellen Differentialgleichungssystems

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \vec{y}(t).$$

2. Aufgabe

9 Punkte

Ermitteln Sie die Lösung y des Anfangswertproblems

$$y'' + y = 2\delta(t-1), \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$$

Dabei ist $\delta(t-1)$ die in 1 konzentrierte Delta-Funktion.

3. Aufgabe

12 Punkte

Lösen Sie mit Hilfe des Separationsansatzes das Rand-Anfangswertproblem in $u(x,t)$:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{4}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 0, \qquad 0 \le x \le 2\pi, \quad t \ge 0$$

$$u(0,t) = 0, \qquad u(2\pi,t) = 0, \qquad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = -8\sin 2x.$$

4. Aufgabe

8 Punkte

Gegeben ist im $\mathbb{R}^2$ die partielle Differentialgleichung (in ebenen Polarkoordinaten)

$$\Delta u(r,\varphi) = J_2(\tfrac{1}{2}j_{2;3}r)\sin 2\varphi + 2J_4(\tfrac{1}{2}j_{4;2}r)\sin 4\varphi \qquad \text{für } r < 2,\ \varphi \in [0, 2\pi[\quad (*)$$

mit der Randbedingung

$$u(r,\varphi) = 0 \qquad \text{für } r = 2,\ \varphi \in [0,2\pi[\,, \qquad (**)$$

wobei $j_{2;3}$ und $j_{4;2}$ Nullstellen der Besselfunktionen J_2 bzw. J_4 sind.
Für $n, m \in \mathbb{N}$ haben die Ansatzfunktionen

$$u_{nm}(r,\varphi) := J_n(\tfrac{1}{2}j_{n;m}r)\sin n\varphi$$

die Eigenschaft

$$\Delta u_{nm}(r,\varphi) = -\frac{1}{4}(j_{n;m})^2 u_{nm}(r,\varphi). \qquad (***)$$

a) Zeigen Sie, dass die Funktionen $u_{nm}(r,\varphi)$ die Randbedingung $(**)$ erfüllen.

b) Ermitteln Sie mit Hilfe der Funktionen $u_{nm}(r,\varphi)$ die Lösung $u(r,\varphi)$ des Randwertproblems.

Hinweis: Es ist *nicht* verlangt, die Eigenschaft $(***)$ zu beweisen.