Musterlösung Verständnisteil — ITPDG, 23. Juli 2008

1. Aufgabe

10 Punkte

Die DGL kann mit Trennung der Veränderlichen gelöst werden:

$$\begin{aligned}(1-x^2)y' &= 4x\sqrt{y}\\ \int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y}} &= \int \frac{4x}{1-x^2}\,\mathrm{d}x\\ 2\sqrt{y} &= -2\ln|1-x^2| + \tilde{C}, \qquad \tilde{C}\in\mathbb{R}\\ \sqrt{y} &= -\ln|1-x^2| + C, \qquad C\in\mathbb{R} \quad \boxed{\textbf{4 P.}}\end{aligned}$$

mit $C :== \frac{1}{2}\tilde{C}$.
Man setzt den Anfangswert $y(0) = 1$ in die letzte Zeile ein und bekommt $C = 1$.
$\boxed{\textbf{2 P.}}$

Damit ist

$$y = \left(-\ln|1-x^2| + 1\right)^2 \quad \boxed{\textbf{2 P.}}$$

die gesuchte Lösung.
Diese Lösung hat Singularitäten in -1 und 1, die Anfangsstelle 0 liegt dazwischen, also ist die Lösung des AWP in $]-1,1[$ definiert. $\boxed{\textbf{2 P.}}$

2. Aufgabe

9 Punkte

3 freie Parameter C_1, C_2 und C_3 in allgemeiner Lösung: $n = 3$. $\boxed{\textbf{1 P.}}$

Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind -1 doppelt, 2 einfach. also ist $(\lambda+1)^2(\lambda-2)$ das charakteristische Polynom. $\boxed{\textbf{3 P.}}$,

Mit $(\lambda+1)^2(\lambda-2) = (\lambda^2+2\lambda+1)(\lambda-2) = \lambda^3 - 3\lambda - 2$
ist $a_2 = 0$, $a_1 = -3$, $a_0 = -2$. $\boxed{\textbf{3 P.}}$,

Die Inhomogenität $f(x)$ ergibt sich durch Einsetzen der speziellen Lösung e^x:

$$y''' - 3y' - 2y = \mathrm{e}^x(1-3-2) = -4\mathrm{e}^x,$$

also $f(x) = -4\mathrm{e}^x$. $\boxed{\textbf{2 P.}}$,

3. Aufgabe

6 Punkte

$$u_x - u_y = x + y \implies X' - Y' = x + y \quad \boxed{\textbf{1 P.}}$$

$$\implies X' - x = Y' + y =: \lambda \implies X' = x + \lambda, \qquad Y' = \lambda - y \quad \boxed{\textbf{2 P.}}$$

$$\implies X(x) = \frac{1}{2}x^2 + \lambda x + A \text{ und } Y(y) = -\frac{1}{2}y^2 + \lambda y + B \quad \boxed{\textbf{2 P.}}$$

$$\implies u(x,y) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 + \lambda(x+y) + E \quad \boxed{\textbf{1 P.}}$$

4. Aufgabe

7 Punkte

Das Integral lässt sich als eine Faltung auffassen:

$$(f' * f)(t) = \frac{2}{3}t^4. \qquad \boxed{\textbf{1 P.}}$$

Als stetige Funktion besitzt f eine Laplacetransformierte; mit $F(s) := \mathcal{L}[f](s)$ ist dann

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[f'] \cdot \mathcal{L}[f] &= \frac{2}{3}\mathcal{L}[t^4](s) \qquad \boxed{\textbf{2 P.}} \\
sF(s) \cdot F(s) &= \frac{16}{s^5} \qquad \boxed{\textbf{2 P.}} \\
[F(s)]^2 &= \frac{16}{s^6} \\
F(s) &= \pm\frac{4}{s^3} \\
f(t) &= \pm 2t^2. \qquad \boxed{\textbf{2 P.}}
\end{aligned}$$

5. Aufgabe

8 Punkte

a) Wahr.
$\sin 2x$ kann nur aus e^{2ix} und e^{-2ix} erzeugt werden. $\cos 2x$ ist ebenfalls ein Erzeugnis dieser Exponentialfunktionen und löst daher die DGL.

b) Falsch.
Gegenbeispiel: $y_1(t) = t$, $y_2(t) = t^2$. Die Wronskideterminante ist

$$\begin{vmatrix} t & t^2 \\ 1 & 2t \end{vmatrix} = 2t^2 - t^2 = t^2.$$

Sie verschwindet für $t = 0$, aber die Monome t und t^2 sind offensichtlich linear unabhängig.

c) Falsch.
$e^{-|x|}$ ist an der Stelle 0 nicht differenzierbar.

d) Falsch.
Weil wegen $J_1(x) = -J_{-1}(x)$ die Funktionen J_1 und J_{-1} linear abhängig sind, können sie kein Fundamentalsystem bilden.