Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik SS 08

Prof. Dr. Schief 08. Oktober 2008

Oktober – Klausur (Rechenteil)
Integraltransformationen und partielle Differentialgleichungen für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen ist nur die **auf der ISIS-Kursseite angebotene** Laplacetabelle zugelassen. Taschenrechner und Formelsammlungen sind nicht zugelassen. Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Rechenaufgaben. Geben Sie immer den **vollständigen Rechenweg** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

Die Gesamtklausur ist mit 40 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 12 von 40 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	4	Σ

1. Aufgabe

10 Punkte

Ermitteln Sie die allgemeine Lösung $\vec{y}(t)$ des reellen Differentialgleichungssystems

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \vec{y}(t).$$

2. Aufgabe

10 Punkte

Ermitteln Sie die Lösung y des Anfangswertproblems

$$y'' + 4y = u_2(t), \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = 0$$

mit der Stufenfunktion $u_2(t)$.

3. Aufgabe

12 Punkte

Lösen Sie mit Hilfe des Separationsansatzes das Rand-Anfangswertproblem in $u(x,t)$:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = u(x,t), \qquad 0 \le x \le \pi, \quad t \ge 0$$

$$u(0,t) = 0, \qquad u(\pi,t) = 0, \qquad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \sin 2x.$$

4. Aufgabe

8 Punkte

Gegeben ist im $\mathbb{R}^2$ die Quadratfläche $\mathcal{Q}$ mit den Ecken $(0,0)$, $(2,0)$ $(0,2)$ und $(2,2)$. Auf $\mathcal{Q}$ liegt das Randwertproblem

$$\Delta u(x,y) = 2\sin(3\pi x)\sin(4\pi y) + 3\sin(2\pi x)\sin(\pi y) \qquad \text{innerhalb } \mathcal{Q} \qquad (*)$$

$$u(x,y) = 0 \qquad \text{auf dem Rand von } \mathcal{Q} \qquad (**)$$

vor. Für $m,n \in \mathbb{N}$ haben die Ansatzfunktionen

$$u_{mn}(x,y) := \sin(m\pi x)\sin(n\pi y)$$

die Eigenschaft

$$\Delta u_{mn}(x,y) = -(m^2+n^2)\pi^2 u_{mn}(x,y). \qquad (***)$$

a) Zeigen Sie, dass die Funktionen $u_{mn}(x,y)$ die Randbedingung $(**)$ erfüllen.

b) Ermitteln Sie mit Hilfe der Funktionen $u_{mn}(x,y)$ die Lösung $u(x,y)$ des Randwertproblems.

Hinweis: Es ist *nicht* verlangt, die Eigenschaft $(***)$ zu beweisen.
Der Rand von $\mathcal{Q}$ besteht aus den vier Seiten des Quadrats einschließlich der Ecken.