**Musterlösung Verständnisteil — ITPDG, 08. Oktober 2008**

## 1. Aufgabe

9 Punkte

Im Sinne des EES im Skript ist $G(x,y) = xy$. $G$ ist überall in $\mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar, damit gibt es für jeden Punkt $(x_0, y_0)$ genau eine Lösung $y$ mit $y(x_0) = y_0$.

Ermittlung der Lösung durch Trennung der Veränderlichen für Stellen $x$ mit $y(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} 2yx &= y' \\ 2x &= \frac{y'}{y} \\ x^2 + \tilde{C} &= \ln|y| \qquad \tilde{C} \in \mathbb{R} \\ C\mathrm{e}^{x^2} &= y \qquad C \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \end{aligned}$$

Anpassen an $y(x_0) = y_0$:

$$C\mathrm{e}^{x_0^2} = y_0 \implies C = y_0 \mathrm{e}^{-x_0^2}.$$

Man findet also unter der Voraussetzung $y(x) \neq 0$ die Lösung

$$y(x) = y_0 \mathrm{e}^{x^2 - x_0^2}.$$

Wenn $y_0 \neq 0$, dann gilt stets $y(x) \neq 0$ und ist die obige Herleitung eine Äquivalenzumformung. Dann ist $y(x) = y_0 \mathrm{e}^{x^2 - x_0^2}$ die zu suchende Lösung.
Wenn $y_0 = 0$, dann ist die obige Herleitung nicht anwendbar. Aber man rät dann die konstante Lösung $y(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ des AWP mit $y(x_0) = 0$.

*Alternative: Beweis durch Probe* Die durch TdV gefundene Lösung einfach einsetzen ohne Rücksicht auf $y(x) \neq 0$:

$$\begin{aligned} 2yx = 2xy_0 \mathrm{e}^{x^2 - x_0^2} \text{ und } y' = y_0 \mathrm{e}^{x^2 - x_0^2} \cdot 2x \\ \implies 2yx = y' : \text{ DGL erfüllt} \end{aligned}$$

Es ist außerdem $y(x_0) = y_0 \mathrm{e}^0 = y_0$. Das AWP ist damit für jedes $(x_0, y_0)$ gelöst.

## 2. Aufgabe

8 Punkte

Die Aufgabe wurde durch Ansage abgendert. Es soll nun $a_{\text{in}}(t) = 1$ gesetzt werden.

Berechnung der Übertragungsfunktion $H(s)$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[a_{\text{in}}](s) \cdot H(s) &= \mathcal{L}[a_{\text{out}}](s) \\
\frac{1}{s} \cdot H(s) &= \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \\
H(s) &= \frac{\omega s}{s^2 + \omega^2}
\end{aligned}$$

Für die Antwort $b_{\text{out}}(t)$ ist dann

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[b_{\text{out}}](s) &= \mathcal{L}[b_{\text{in}}](s) \cdot H(s) \\
&= \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \cdot \frac{\omega s}{s^2 + \omega^2} \\
&= \frac{\omega^2 s}{(s^2 + \omega^2)^2} \\
&= \frac{\omega}{2} \cdot \frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2},
\end{aligned}$$

und mit der Laplace-Tabelle

$$b_{\text{out}}(t) = \frac{\omega}{2} \cdot t \sin \omega t = \frac{1}{2} \omega t \sin \omega t.$$

## 3. Aufgabe

6 Punkte

$h$ wird durch ein Faltungsintegral definiert:

$$\begin{aligned} h(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f'(t+3-u)g(2u)\,\mathrm{d}u \\ &= f'(t+3) * g(2t). \end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[h](\omega) &= \mathcal{F}\left[f'(t+3) * g(2t)\right](\omega) \\ &= \mathcal{F}\left[f'(t+3)\right](\omega) \cdot \mathcal{F}\left[g(2t)\right](\omega) && \textit{Faltungssatz} \\ &= \mathrm{i}\omega \mathcal{F}\left[f(t+3)\right](\omega) \cdot \frac{1}{2}\mathcal{F}\left[g(t)\right]\left(\tfrac{1}{2}\omega\right) && \textit{Ableitung; konstanter Faktor} \\ &= \mathrm{i}\omega \mathrm{e}^{3\mathrm{i}\omega} \mathcal{F}\left[f\right](\omega) \cdot \frac{1}{2}\mathcal{F}\left[g\right]\left(\tfrac{1}{2}\omega\right) && \textit{Verschiebung} \\ &= \frac{\mathrm{i}\omega}{2}\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\omega} \mathcal{F}\left[f\right](\omega) \cdot \mathcal{F}\left[g\right]\left(\tfrac{1}{2}\omega\right) \end{aligned}$$

## 4. Aufgabe

9 Punkte

Es ist

$$\begin{aligned} u_x(x,t) &= 2xF'(x^2+\lambda t) \\ u_{xx}(x,t) &= 2F'(x^2+\lambda t) + 4x^2F''(x^2+\lambda t) \\ u_{xt}(x,t) &= 2x\lambda F''(x^2+\lambda t), \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \lambda u_{xx} - 2xu_{xt} &= 2u \\ 2\lambda F'(x^2+\lambda t) + 4x^2\lambda F''(x^2+\lambda t) - (2x)^2\lambda F''(x^2+\lambda t) &= 2F(x^2+\lambda t) \\ \lambda F'(x^2+\lambda t) &= F(x^2+\lambda t) \\ F'(x^2+\lambda t) &= \frac{1}{\lambda}F(x^2+\lambda t) \end{aligned}$$

Man bekommt also eine gewöhnliche DGL für $F$ mit der Lösung

$$F(x^2+\lambda t) = C\mathrm{e}^{\lambda^{-1}(x^2+\lambda t)}$$

und für $u$ also die Lösungen

$$u(x,t) = C\mathrm{e}^{\lambda^{-1}(x^2+\lambda t)}$$

mit einer freien Konstanten $C \in \mathbb{R}$.

## 5. Aufgabe

8 Punkte

a) Wahr.
Die Funktionen lösen beide die lineare DGL (mit Nachrechnen) und sind linear unabhängig.

b) Wahr.
Diese Funktion ist beschränkt und damit erst recht von exponentieller Ordnung.

c) Falsch.
Die Fouriertransformierte ist $\sqrt{2\pi}\mathrm{e}^{-\omega^2/2}$ und verschwindet nirgends, erst recht nicht außerhalb eines endlichen Intervalls.

d) Falsch.
Die Potenzreihenentwicklung lautet

$$J_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,(n+m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m}.$$

Innerhalb der Summation stehen nur gerade Potenzen von $x$, also entscheidet der Vorfaktor $\left(\frac{x}{2}\right)^n$. Wenn $n$ ungerade ist, ist $J_n(x)$ ungerade.