Musterlösung Rechenteil — ITPDG, 18. Februar 2009

1. Aufgabe 11 Punkte

Umschreiben in Matrixform:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Charakteristisches Polynom:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & -1 \\ 2 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda-2)(\lambda+2)$$

Die Eigenwerte sind -2,0,2 und alle einfach.

Finden des Eigenraums zum Eigenwert 0:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hingucken führt zum Eigenraum

$$\operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Finden des Eigenraums zum Eigenwert -2:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hingucken führt zum Eigenraum

$$\operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Finden des Eigenraums zum Eigenwert 2:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hingucken führt zum Eigenraum

$$\operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Damit haben wir allgemein

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \mathrm{e}^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 \mathrm{e}^{-2x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

An der Stelle $x = 0$ gilt also

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 + C_2 \\ C_1 + C_3 \\ C_2 + C_3 \end{pmatrix}$$

und damit $C_1 = C_2 = 1$ und $C_3 = -1$.
Die Lösungen lauten also

$$y_1(x) = 1 + \mathrm{e}^{2x}, \qquad y_2(x) = 1 - \mathrm{e}^{-2x}, \qquad y_3(x) = \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{-2x}.$$

2. Aufgabe

9 Punkte

Für $Y(s) := \mathcal{L}[y](s)$ folgt aus der DGL

$$\begin{aligned} (s^2 Y(s) - s \cdot 1 - 1) + (sY(s) - 1) - 2Y(s) &= 12 \cdot \frac{1}{s+3} \mathrm{e}^{-s} \\ (s^2 + s - 2)Y(s) - s - 2 &= \frac{12\mathrm{e}^{-s}}{s+3} \\ Y(s) &= \frac{12\mathrm{e}^{-s}}{(s^2+s-2)(s+3)} + \frac{s+2}{s^2+s-2} \end{aligned}$$

Partialbruchzerlegung:

$$\frac{1}{(s^2+s-2)(s+3)} = \frac{1}{(s-1)(s+2)(s+3)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+3}$$

$$\text{mit Zuhaltemethode:} \qquad A = \frac{1}{12}, \quad B = -\frac{1}{3}, \quad C = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{(s-1)(s+2)(s+3)} = \frac{1}{12}\frac{1}{s-1} - \frac{1}{3}\frac{1}{s+2} + \frac{1}{4}\frac{1}{s+3}$$

und

$$\frac{s+2}{(s-1)(s+2)} = \frac{1}{s-1}.$$

Es gilt

$$Y(s) = \mathrm{e}^{-s}\left(\frac{1}{s-1} - \frac{4}{s+2} + \frac{3}{s+3}\right) + \frac{1}{s-1}$$

$$y(t) = u_1(t)\left[\mathrm{e}^{t-1} - 4\mathrm{e}^{-2(t-1)} + 3\mathrm{e}^{-3(t-1)}\right] + \mathrm{e}^t$$

3. Aufgabe

11 Punkte

Ansatz: $u(x,t) = X(x)T(t)$
DGL: $4X''(x)T(t) - X(x)T'(t) = 0$
Bedingungen: $X(0) = X(2\pi) = 0$ und $X(x)T(0) = \sin 3x$
Division der DGL durch Produkt $X(x)T(t)$ und Separation:

$$4\frac{X''(x)}{X(x)} - \frac{T'(t)}{T(t)} = 0 \implies \frac{X''(x)}{X(x)} =: \lambda = \frac{T'(t)}{4T(t)}$$

DGLn in X und T:

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0,$$
$$T'(t) - 4\lambda T(t) = 0.$$

Die Lösung für T lautet:

$$T(t) = T(0)\mathrm{e}^{4\lambda t}.$$

Fallunterscheidung für λ:

a) $\lambda > 0:\ X(x) = c_0\mathrm{e}^{\sqrt{\lambda}x} + c_1\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}x}$. Dann: $c_0 + c_1 = 0 \implies c_1 = -c_0$. Also $X(2\pi) = 2c_0 \sinh 2\pi\sqrt{\lambda} \implies c_0 = 0 \implies X(x) = 0$. Widerspruch.

b) $\lambda = 0:\ X(x) = c_0 x + c_1$. Dann: $c_1 = 0, 2\pi c_0 = 0 \implies X(x) = 0$. Widerspruch.

c) $\lambda < 0:\ X(x) = c_2 \cos\sqrt{-\lambda}x + c_3 \sin\sqrt{-\lambda}x$, $X(0) = 0 \implies c_2 = 0$.

   $X(2\pi) = c_3 \sin 2\pi\sqrt{-\lambda} = 0 \implies c_3 = 0$ oder $\sqrt{-\lambda} = \frac{n\pi}{2\pi} = \frac{n}{2},\ n \in \mathbb{N}, n > 0$, d.h. $\lambda = -\frac{n^2}{4}$

Mit diesem λ bekommen wir für $T(t)$

$$T(t) = T(0)\mathrm{e}^{-n^2 t}.$$

Zu jedem $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$ gibt es eine Lösung

$$u_n(x,t) = \mathrm{e}^{-n^2 t} \sin\left(\frac{n}{2}x\right).$$

Superposition dieser Lösungen, um Anfangsauslenkung einzuarbeiten:

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n}{2}x\right) = 2\sin 3x \quad (0 \le x \le 2\pi).$$

Somit

$$a_6 = 2 \text{ und } a_n = 0 \text{ für } n \neq 6.$$

Die Lösung des RWP lautet

$$u(x,t) = 2\mathrm{e}^{-36t} \sin 3x.$$

4. Aufgabe 8 Punkte

Die Superposition der fünf Funktionen ist

$$u(x,y) = A + Bx + Cy + D(x^2 - y^2) + Exy,$$

wobei die Konstanten A, B, C, D und E durch die Randbedingungen bestimmt werden:

$$u(0,y) = A + Cy - Dy^2 \stackrel{!}{=} -y^2 \implies A = 0, \quad C = 0, \quad D = 1;$$
$$u(x,0) = Bx + Dx^2 \stackrel{!}{=} x^2 \implies B = 0, \quad D = 1;$$

$$\text{auf der Hypotenuse von } \mathcal{D}:$$
$$u(x, 1-x) = A + Bx + C(1-x) + D(x^2 - (1-x)^2) + Ex(1-x)$$
$$= 2x - 1 + Ex(1-x) = -Ex^2 + (E+2)x - 1 \stackrel{!}{=} 2x^2 - 1 \implies E = -2.$$

Damit ist

$$u(x,y) = x^2 - y^2 - 2xy$$