Musterlösung Verständnisteil — ITPDG, 18. Februar 2009

1. Aufgabe

9 Punkte

Im Sinne des EES im Skript ist $G(x, y) = -y^2 \sin x$. G ist im Punkt $(0, -1)$ (und sogar überall in $\mathbb{R}^2$) stetig differenzierbar. Damit gibt es genau eine Lösung des AWP.

Ermittlung der Lösung durch Trennung der Veränderlichen für Stellen x mit $y(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} -y^2 \sin x &= y' \\ \sin x &= -\frac{y'}{y^2} \\ -\cos x + C &= \frac{1}{y} \qquad C \in \mathbb{R} \\ \frac{1}{-\cos x + C} &= y \qquad C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Anpassen an $y(0) = \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{-1 + C} &= \frac{1}{2} \qquad C \in \mathbb{R} \\ C &= 3 \end{aligned}$$

(Man kann die DGL auch mit dem Bernoulli-Ansatz $z = y^{-1}$ lösen.)

Man findet also unter der Voraussetzung $y(x) \neq 0$ die Lösung

$$y(x) = \frac{1}{3 - \cos x}.$$

Der Nenner hat keine Nullstellen, damit ist der Definitionsbereich der Lösung gleich $\mathbb{R}$.

2. Aufgabe 6 Punkte

Es gilt

$$\cos 2t * b_{\text{in}}(t) = t \sin 2t$$

und also im Laplacebereich also (mit Laplacetabelle)

$$\frac{s}{s^2+4} B_{\text{in}}(s) = \frac{4s}{(s^2+4)^2}$$

$$B_{\text{in}}(s) = \frac{4}{s^2+4}$$

Das entspricht im Zeitbereich der Funktion

$$b_{\text{in}}(t) = 2 \sin 2t.$$

Das LTI-System muss mit $2 \sin 2t$ erregt werden.

3. Aufgabe 6 Punkte

Es besteht die Fourier-Korrespondenz

$$\mathcal{F}[r_1] = \text{si}, \qquad \mathcal{F}[\text{si}] = 2\pi r_1.$$

Es ist nach dem Faltungssatz

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[\text{si} * \text{si}](\omega) &= \mathcal{F}[\text{si}](\omega)\mathcal{F}[\text{si}](\omega) \\
&= 2\pi r_1(\omega) \cdot 2\pi r_1(\omega) \\
&= (2\pi)^2 \cdot \frac{1}{2} r_1(\omega) \\
&= 2\pi^2 r_1(\omega).
\end{aligned}$$

Mit dem Satz über inverse Fouriertransformation hat man

$$\begin{aligned}
(\text{si} * \text{si})(t) &= \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}[2\pi^2 r_1](-t) \\
&= \pi \cdot \text{si}(-t) \\
&= \pi \, \text{si}(t).
\end{aligned}$$

Es gilt also

$$\text{si} * \text{si} = \pi \, \text{si}\,.$$

4. Aufgabe

11 Punkte

Mit
$$u(x,y,z) = \mathrm{e}^{X(x)+Y(y)+Z(z)}$$
ist
$$(X'Y' + Y'Z')\mathrm{e}^{X(x)+Y(y)+Z(z)} = \mathrm{e}^{X(x)+Y(y)+Z(z)}$$
$$X'Y' + Y'Z' = 1$$
Separation:
$$(X' + Z')Y' = 1$$
$$X' + Z' = \frac{1}{Y'}$$
$$\Longrightarrow \quad X' + Z' = \lambda, \qquad Y' = \lambda^{-1}.$$
Für Y ist also $Y(y) = \lambda^{-1}y + Y(0)$.
Weiter ist
$$X' = \lambda - Z' \implies X' = \mu, \qquad \lambda - Z' = \mu,$$
also
$$X(x) = \mu x + X(0) \quad , \quad Z(z) = (\lambda - \mu)z + Z(0) \quad ,$$
so dass
$$u(x,y,z) = \exp\left[\mu x + \lambda^{-1}y + (\lambda - \mu)z + X(0) + Y(0) + Z(0)\right]$$
die gesuchten Lösungen sind.

Der Fall $\lambda = 0$ kann nicht eintreten.

5. Aufgabe

8 Punkte

a) Falsch.
Mit xe^x ist auch e^x eine Lösung (ebenso ist mit x auch 1 eine Lösung), damit ist die DGL mindestens von 3. Ordnung.

Somit ist die Ordnung sogar mindestens gleich 4.

b) Falsch.
Die Funktion e^t ist unbeschränkt, besitzt aber eine Laplacetransformierte.

c) Wahr.
g besitzt dann eine Fouriertransformierte, und das angegebene Integral ist der Wert dieser Fouriertransformierten an der Stelle 0:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,\mathrm{d}t = \mathcal{F}[g](0).$$

d) Wahr.
Diese drei Polynome haben alle unterschiedlichen Grad und sind damit linear unabhängig.