Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik WS 08/09
Dr. J. Fuhrmann 08. April 2009

April – Klausur (Rechenteil)
Integraltransformationen und partielle Differentialgleichungen für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen ist nur die **auf der ISIS-Kursseite angebotene** Laplacetabelle zugelassen. Taschenrechner und Formelsammlungen sind nicht zugelassen. Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Rechenaufgaben. Geben Sie immer den **vollständigen Rechenweg** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

Die Gesamtklausur ist mit 40 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 12 von 40 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	4	Σ

1. Aufgabe 12 Punkte

Ermitteln Sie die Lösungen $y_1(x), y_2(x)$ und $y_3(x)$ des reellen Anfangswertsproblems

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 - y_3 \\ y_2' &= y_2 - y_3 \\ y_3' &= -\tfrac{1}{2}y_1 - \tfrac{1}{2}y_2 + y_3 \end{aligned}$$
$$y_1(0) = 3, \quad y_2(0) = 1, \quad y_3(0) = 0.$$

2. Aufgabe 8 Punkte

Ermitteln Sie die Lösung y des Anfangswertproblems

$$y'' + 9y = 3\delta(t-2), \qquad y(0) = 3,\ y'(0) = 6$$

mit einem δ-Stoß zum Zeitpunkt 2.

3. Aufgabe 12 Punkte

Lösen Sie mit Hilfe des Separationsansatzes das Rand-Anfangswertproblem in $u(x,t)$:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - u(x,t), \qquad 0 < x < \pi, \quad t > 0$$
$$u(0,t) = 0, \qquad u(\pi,t) = 0, \qquad \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 17\sin 4x.$$

4. Aufgabe 8 Punkte

Gegeben ist im $\mathbb{R}^2$ die abgeschlossene Rechteckfläche $\mathcal{R}$ mit den Ecken $(0,0)$, $(2,0)$ $(0,1)$ und $(2,1)$. Auf $\mathcal{R}$ liegt das Randwertproblem

$$\Delta u(x,y) = 2\sin(\pi x)\sin(2\pi y) + \sin(2\pi x)\sin(\pi y) \qquad \text{innerhalb } \mathcal{R} \qquad (*)$$
$$u(x,y) = 0 \qquad \text{auf dem Rand von } \mathcal{R} \qquad (**)$$

vor. Für $m, n \in \mathbb{N}$ haben die Ansatzfunktionen

$$u_{mn}(x,y) := \sin(m\pi x)\sin(n\pi y)$$

die Eigenschaft

$$\Delta u_{mn}(x,y) = -(m^2 + n^2)\pi^2 u_{mn}(x,y). \qquad (***)$$

a) Zeigen Sie, dass die Funktionen $u_{mn}(x,y)$ die Randbedingung $(**)$ erfüllen.

b) Ermitteln Sie mit Hilfe der Funktionen $u_{mn}(x,y)$ die Lösung $u(x,y)$ des Randwertproblems.

Hinweis: Es ist *nicht* verlangt, die Eigenschaft $(***)$ zu beweisen.
Der Rand von $\mathcal{R}$ besteht aus den vier Seiten des Rechtecks einschließlich der Ecken.