Musterlösung Rechenteil — ITPDG, 08. April 2009

1. Aufgabe

12 Punkte

Umschreiben in Matrixform:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Charakteristisches Polynom:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$$

Die Eigenwerte sind 0,1,2 und alle einfach.

Finden des Eigenraums zum Eigenwert 0:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hingucken führt zum Eigenraum

$$\operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Finden des Eigenraums zum Eigenwert 1:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hingucken führt zum Eigenraum

$$\operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Finden des Eigenraums zum Eigenwert 2:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hingucken führt zum Eigenraum

$$\operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Damit haben wir allgemein

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \mathrm{e}^x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \mathrm{e}^{2x} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

An der Stelle $x = 0$ gilt also

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 + C_2 - C_3 \\ C_1 - C_2 - C_3 \\ C_1 + C_3 \end{pmatrix}$$

und damit $C_1 = C_2 = 1$ und $C_3 = -1$.
Die Lösungen lauten also

$$y_1(x) = 1 + \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{2x}, \qquad y_2(x) = 1 - \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{2x}, \qquad y_3(x) = 1 - \mathrm{e}^{2x}.$$

2. Aufgabe

8 Punkte

Für $Y(s) := \mathcal{L}[y](s)$ folgt aus der DGL

$$\begin{aligned} (s^2 Y(s) - s \cdot 3 - 6) + 9Y(s) &= 3\mathrm{e}^{-2s} \\ (s^2 + 9) Y(s) &= 3\mathrm{e}^{-2s} + 3s + 6 \\ Y(s) &= \frac{3\mathrm{e}^{-2s}}{s^2 + 9} + \frac{3s}{s^2 + 9} + \frac{6}{s^2 + 9} \end{aligned}$$

Rücktransformation:

$$y(t) = u_2(t) \sin 3(t - 2) + 3 \cos 3t + 2 \sin 3t$$

3. Aufgabe

12 Punkte

Ansatz: $u(x,t) = X(x)T(t)$
DGL: $X''(x)T(t) + X(x)T(t) = X(x)T'(t)$
Bedingungen: $X(0) = X(\pi) = 0$ und $X(x)T'(0) = 17\sin 3x$
Division der DGL durch Produkt $X(x)T(t)$ und Separation:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} - 1 \implies \frac{X''(x)}{X(x)} =: \lambda = \frac{T'(t)}{T(t)} - 1$$

DGLn in X und T:

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0,$$
$$T'(t) - (\lambda + 1)T(t) = 0.$$

Die Lösung für T lautet:

$$T(t) = T(0)\mathrm{e}^{(\lambda+1)t}.$$

Fallunterscheidung für λ:

a) $\lambda > 0:\ X(x) = c_0\mathrm{e}^{\sqrt{\lambda}x} + c_1\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}x}$. Dann: $c_0 + c_1 = 0 \implies c_1 = -c_0$. Also $X(\pi) = 2c_0 \sinh \pi\sqrt{\lambda} \implies c_0 = 0 \implies X(x) = 0$. Widerspruch.

b) $\lambda = 0:\ X(x) = c_0 x + c_1$. Dann: $c_1 = 0, 2\pi c_0 = 0 \implies X(x) = 0$. Widerspruch.

c) $\lambda < 0:\ X(x) = c_2\cos\sqrt{-\lambda}x + c_3\sin\sqrt{-\lambda}x$, $X(0) = 0 \implies c_2 = 0$.
$X(\pi) = c_3 \sin \pi\sqrt{-\lambda} = 0 \implies c_3 = 0$ oder $\sqrt{-\lambda} = \frac{n\pi}{\pi} = n,\ n \in \mathbb{N}, n > 0$, d.h. $\lambda = -n^2$

Mit diesem λ bekommen wir für $T(t)$

$$T(t) = T(0)\mathrm{e}^{(-n^2+1)t}.$$

Zu jedem $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$ gibt es eine Lösung

$$u_n(x,t) = \mathrm{e}^{(-n^2+1)t} \sin(nx)\,.$$

Superposition dieser Lösungen, um Anfangsauslenkung einzuarbeiten:

$$\dot{u}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(-n^2+1)\sin(nx) = 17\sin 4x \quad (0 \le x \le \pi).$$

Somit

$$a_4 = -\frac{17}{15} \text{ und } a_n = 0 \text{ für } n \neq 4.$$

Die Lösung des RWP lautet

$$u(x,t) = -\frac{17}{15}\mathrm{e}^{-17t}\sin 4x.$$

4. Aufgabe

8 Punkte

a) Für die Randpunkte von $\mathcal{R}$ gilt $x = 0$ oder $x = 2$ oder $y = 0$ oder $y = 1$. Damit ist

$$\begin{aligned}
u_{mn}(0,y) &= \sin(0)\sin(n\pi y) = 0,\\
u_{mn}(x,0) &= \sin(m\pi x)\sin(0) = 0,\\
u_{mn}(2,y) &= \sin(2m\pi)\sin(n\pi y) = 0,\\
u_{mn}(x,1) &= \sin(m\pi x)\sin(n\pi) = 0.
\end{aligned}$$

b) Die Lösung $u(x,y)$ wird als Superposition der $u_{mn}(x,y)$ angeschrieben:

$$u(x,y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn}u_{mn}(r,\varphi)$$

Dann ist

$$\Delta u = \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn}\Delta u_{mn} = -\pi^2 \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn}(m^2+n^2)u_{mn}$$

Die Poissongleichung $(*)$ ergibt

$$-\pi^2 \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn}(m^2+n^2)\sin(m\pi x)\sin(n\pi y) = 2\sin(\pi x)\sin(2\pi y) + \sin(2\pi x)\sin(\pi y)$$

und damit

$$\begin{gathered}
A_{12} = -\frac{2}{5\pi^2}, \quad A_{21} = -\frac{1}{5\pi^2},\\
A_{mn} = 0 \text{ für } (m,n) \notin \{(2,1),(1,2)\}.
\end{gathered}$$

Die Lösung $u(x,y)$ lautet also mit dem gemachten Ansatz

$$u(x,y) = -\frac{2}{5\pi^2}\sin(\pi x)\sin(2\pi y) - \frac{1}{5\pi^2}\sin(2\pi x)\sin(\pi y).$$