Musterlösung Verständnisteil — ITPDG, 08. April 2009

1. Aufgabe

9 Punkte

Im Sinne des EES im Skript ist $G(x, y) = y^2 \cos x$. G ist im Punkt $(0, 1)$ (und sogar überall in $\mathbb{R}^2$) stetig differenzierbar. Damit gibt es genau eine Lösung des AWP.

Ermittlung der Lösung durch Trennung der Veränderlichen für Stellen x mit $y(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} y^2 \cos x &= y' \\ \cos x &= \frac{y'}{y^2} \\ \sin x + C &= -\frac{1}{y} \qquad C \in \mathbb{R} \\ -\frac{1}{\sin x + C} &= y \qquad C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Anpassen an $y(0) = 1$:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{0 + C} &= 1 \qquad C \in \mathbb{R} \\ C &= -1 \end{aligned}$$

Man findet also unter der Voraussetzung $y(x) \neq 0$ die Lösung

$$y(x) = -\frac{1}{\sin x - 1} = \frac{1}{1 - \sin x}.$$

Die der Anfangsstelle 0 am nächsten liegenden Nullstellen des Nenners sind $-\frac{3\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$. Der Definitionsbereich der Lösung ist gleich $]-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

2. Aufgabe

7 Punkte

Das Integral ist eine Faltung:

$$f(t) * \mathrm{e}^{-t} = (t - 1)t.$$

Wenn f eine Laplacetransformierte besitzt, dann ist mit $F := \mathcal{L}[f]$:

$$F(s) \cdot \frac{1}{s + 1} = \frac{2}{s^3} - \frac{1}{s^2}.$$

Daraus folgt

$$F(s) = (s + 1)\left(\frac{2}{s^3} - \frac{1}{s^2}\right) = \frac{2}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{2}{s^3} - \frac{1}{s^2} = \frac{2}{s^3} + \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s}$$

und schließlich

$$f(t) = t^2 + t - 1$$

3. Aufgabe

8 Punkte

Mit dem Faltungssatz gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[\mathrm{e}^{-t^2/2} * \mathrm{e}^{-t^2/2}\right](\omega) &= \left(\mathcal{F}\left[\mathrm{e}^{-t^2/2}\right]\right)^2 \\ &= \left(\sqrt{2\pi}\mathrm{e}^{-\omega^2/2}\right)^2 \\ &= 2\pi\mathrm{e}^{-\omega^2}\end{aligned}$$

Mit dem Umkehrsatz $f(t) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}[F](-t)$ folgt dann

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\left[2\pi\mathrm{e}^{-\omega^2}\right](-t) &= \mathcal{F}\left[\mathrm{e}^{-(\sqrt{2}\omega)^2/2}\right](-t) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\mathcal{F}\left[\mathrm{e}^{-\omega^2/2}\right](-\frac{t}{\sqrt{2}}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(-\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2} \\ &= \sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-t^2/4}\end{aligned}$$

4. Aufgabe

8 Punkte

Mit

$$u(x, y) = (X(x) + Y(y))^2$$

ist

$$\begin{aligned}2(X+Y)X' - 4x(X+Y)Y' = 0 \\ X' - 2xY' = 0\end{aligned}$$

Separation:

$$\begin{aligned}X' &= 2xY' \\ \tfrac{1}{2}x^{-1}X' &= Y' \\ \implies \tfrac{1}{2}x^{-1}X' = \lambda, &\qquad Y' = \lambda.\end{aligned}$$

Für Y ist also $Y(y) = \lambda y + Y(0)$.
Weiter ist

$$X' = 2\lambda x \implies X = \lambda x^2 + X(0)$$

also sind

$$u(x, y) = \left(\lambda x^2 + X(0) + \lambda y + Y(0)\right)^2$$

die gesuchten Lösungen.

5. Aufgabe

8 Punkte

a) Wahr.
Lösungen von solchen DGL sind Linearkombinationen von Funktionen des Typs $x^r e^{\lambda x}$ mit $r \in \mathbb{N}_0$ und $\lambda \in \mathbb{C}$. Diese Funktionen sind beliebig oft differenzierbar.

b) Wahr.
Dieses DGL-System lebt im $\mathbb{R}^2$, ist linear und von 1. Ordnung. Damit hat es 2 linear unabhängige Lösungen.

Eine Lösungsbasis ist durch $\vec{y}_1 = \left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)$ und $\vec{y}_2 = \left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)$ gegeben.

c) Falsch.

- Die Fouriertransformierte einer Schwartz-Funktion ist wieder eine Schwartz-Funktion. Periodische Funktionen können nicht im Unendlichen abfallen, somit sind periodische Funktionen keine Schwartz-Funktionen.
- Die Funktion $e^{-t^2/2}$ ist eine Schwartz-Funktion; deren Fouriertransformierte ist $\sqrt{2\pi}e^{-\omega^2/2}$, die nicht periodisch ist.

d) Falsch.
Das Legendre-Polynom P_0 ist konstant mit dem Wert 1 und besitzt überhaupt keine Nullstelle.