Musterlösung Rechenteil — ITPDG, 22. Juli 2009

1. Aufgabe

9 Punkte

Ermittlung der Lösung durch Trennung der Veränderlichen für Stellen x mit $y(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} x^{-1}y^2 &= y' \\ x^{-1} &= \frac{y'}{y^2} \\ \ln x + C &= -\frac{1}{y} \qquad C \in \mathbb{R} \\ -\frac{1}{\ln x + C} &= y \qquad C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Anpassen an $y(1) = \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{0 + C} &= \frac{1}{2} \qquad C \in \mathbb{R} \\ C &= -2 \end{aligned}$$

Man findet also unter der Voraussetzung $y(x) \neq 0$ die Lösung

$$y(x) = -\frac{1}{\ln x - 2} = \frac{1}{2 - \ln x}.$$

Der Nenner darf nicht verschwinden, das Argument des ln muss positiv sein, also gilt $x \neq \mathrm{e}^2$ und $x > 0$ Die Anfangsstelle 1 liegt im Intervall $]0, \mathrm{e}^2[$. Es gibt kein Intervall, das dieses Intervall echt umfasst, ohne eine der beiden Bedingungen $x \neq \mathrm{e}^2$ und $x > 0$ zu verletzen. Der maximale Definitionsbereich der Lösung ist gleich $]0, \mathrm{e}^2[$.

2. Aufgabe

11 Punkte

Aus

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} &= 0 \\ (3-\lambda)^2(2-\lambda) - (2-\lambda) &= 0 \\ ((3-\lambda)^2 - 1)(2-\lambda) &= 0 \\ (2-\lambda)(4-\lambda)(2-\lambda) &= 0 \\ (2-\lambda)^2(4-\lambda) &= 0 \end{aligned}$$

ergeben sich die Eigenwerte $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ und $\lambda_3 = 4$.

Eigenraum zu $\lambda_{1,2} = 2$ ist span $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Eigenraum zu $\lambda_3 = 4$ ist span $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$,

Für jeden Eigenwert sind algebraische und geometrische Vielfachheit gleich.

Damit können wir drei linear unabhängige Lösungen schnell anschreiben:

$$\vec{y}_1(t) == \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0) \end{pmatrix}, \quad \vec{y}_2(t) = \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\vec{y}_3(t) = \mathrm{e}^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad .$$

Die allgemeine Lösung lautet dann

$$\vec{y}(t) = C_1 \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0) \end{pmatrix} + C_2 \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 \mathrm{e}^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad .$$

3. Aufgabe

9 Punkte

Mit $X(s) := \mathcal{L}[x](s)$ und $B(s) := \mathcal{L}[b](s)$ ergibt sich im Laplace-Bereich

$$s^2 X + 6sX + 13X = B$$

Daraus folgt

$$X(s) = \frac{1}{s^2 + 6s + 13} \cdot B(s). \quad .$$

Die Übertragungsfunktion $H(s)$ lautet

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 6s + 13}. \tag{0.1}$$

Um die Impulsantwort zu finden, muss man schreiben:

$$\frac{1}{s^2 + 6s + 13} = \frac{1}{(s+3)^2 + 4} \tag{0.2}$$

Anhand der Laplacetabelle findet man für die Impulsantwort

$$h(t) = \frac{1}{2} \mathrm{e}^{-3t} \sin 2t$$

4. Aufgabe

11 Punkte

a) Ansatz: $u(x,t) = X(x)T(t)$
DGL: $X''(x)T(t) = \frac{1}{2}X(x)T'(t)$
Division der DGL durch Produkt $X(x)T(t)$ und Separation:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{2T(t)} \implies \frac{X''(x)}{X(x)} =: \lambda = \frac{T'(t)}{2T(t)}$$

DGLn in X und T:

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0,$$
$$T'(t) - 2\lambda T(t) = 0.$$

Die Lösung für T lautet:

$$T(t) = T(0)\mathrm{e}^{2\lambda t}.$$

Die Randbedingung ist eine Bedingung für $X(x)$:

$$X(0)T(t) = X(\pi)T(t) = 0$$

. Entweder ist T die Nullfunktion (und damit $u(x,t) = 0$), oder es folgt $X(0) = X(\pi) = 0$.

Fallunterscheidung für λ:

(a) $\lambda > 0 :\ X(x) = c_0\mathrm{e}^{\sqrt{\lambda}x} + c_1\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}x}$. Randbedingung ergibt $c_0 = c_1 = 0$, also $X(x) = 0$, also $u(x,t) = 0$.

(b) $\lambda = 0 :\ X(x) = c_2x + c_3$. Randbedingung ergibt $c_2 = c_3 = 0$, also $X(x) = 0$, also $u(x,t) = 0$.

(c) $\lambda < 0 :\ X(x) = c_4 \cos\sqrt{-\lambda}x + c_5 \sin\sqrt{-\lambda}x$.
Randbedingung ergibt $c_4 = 0$.
$c_5 \neq 0$ nur möglich, wenn $\sin\sqrt{-\lambda}\pi = 0$,
wenn es also ein $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, gibt mit $\lambda = -n^2$.
Dann ist $T(t) = T(0)\mathrm{e}^{-2n^2t}$.

Die nicht-verschwindenden Lösungen von der Form $X(x)T(t)$ mit $X(0) = X(\pi) = 0$ sind die Funktionen $u_n(x,t)$ mit

$$u_n(x,t) := C_n\mathrm{e}^{-2n^2t}\sin nx, \quad C_n \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{N}, n > 0$$

b) Zur Erfüllung der Bedingung $u(x,0) = -2\sin 2x + 5\sin 3x$ für die Anfangsauslenkung muss für $u(x,t)$ eine Superposition der $u_n(x,t)$ angesetzt werden:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \mathrm{e}^{-2n^2 t} \sin nx.$$

Dann sind Zahlen C_n zu finden, so dass

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin nx = -2\sin 2x + 5\sin 3x$$

gilt. Daraus folgt

$$C_2 = -2, \quad C_3 = 5, \quad C_k = 0, \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{2,3\}$$

und schließlich

$$u(x,t) = -2\mathrm{e}^{-8t} \sin 2x + 5\mathrm{e}^{-18t} \sin 3x$$