Musterlösung Verständnisteil — ITPDG, 22. Juli 2009

1. Aufgabe

6 Punkte

Der Ansatz $y(t) = t^r$ ergibt

$$\begin{aligned} t^r(r(r-1) + r - 4) &= 0 \\ r^2 - 4 &= 0 \\ (r-2)(r+2) &= 4 \\ r = -2 \text{ oder } r &= 2 \end{aligned}$$

Die Lösungen t^2 und t^{-2} sind
offensichtlich *oder* per Wronski-Test

$$\begin{vmatrix} t^2 & t^{-2} \\ 2t & -2t^{-3} \end{vmatrix} = -2t^{-1} - 2t^{-1} = -4t^{-1} \neq 0$$

linear unabhängig
und sind 2 Stück.
Weil die DGL von 2. Ordnung ist, bilden t^2 und t^{-2} eine Fundamentalbasis der Lösungen der DGL.

2. Aufgabe

8 Punkte

Charakteristisches Polynom:

$$(1-\lambda)(3-\lambda)+1=\lambda^2-4\lambda+4=(\lambda-2)^2$$

Die Systemmatrix hat den doppelten Eigenwert 2.
Die Gleichung

$$\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix},$$

hat nur die Lösung

$$\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}=v_1\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}.$$

Die geometrische VF des Eigenwerts 2 ist also gleich 1.

Jeder vom Eigenvektor $\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)$ linear unabhängige Vektor ist ein Hauptvektor.

Bestimmt man einen Hauptvektor durch

$$\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h_1\\ h_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix},$$

so erhält man

$$\begin{pmatrix}h_1\\ h_2\end{pmatrix}=h_1\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}.$$

Mit dem speziellen Hauptvektor $\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)$ lässt sich die allgemeine Lösung schnell anschreiben:

$$\vec{y}(t)=C_1\mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}+C_2\mathrm{e}^{2t}\left(\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\right)$$

(Mit einem beliebigen Hauptvektor $\vec{k}$ hat man

$$\vec{y}(t)=C_1\mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}+C_2\mathrm{e}^{2t}\left(\vec{k}+t\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\vec{k}\right)$$

auszuwerten.)
An der Stelle 0 ist

$$\vec{y}(0)=\begin{pmatrix}-1\\ 0\end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix},$$

also $C_1=-1$ und $C_2=1$.
Die gesuchte Lösung ist damit

$$\vec{y}(t)=-\mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}+\mathrm{e}^{2t}\left(\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\right)=\mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix}t-1\\ t\end{pmatrix}$$

3. Aufgabe

9 Punkte

a)

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[\frac{1}{\pi}\frac{\alpha}{\alpha^2+t^2}\right](\omega) &= \frac{\alpha}{\pi\alpha^2}\mathcal{F}\left[\frac{1}{1+\left(\frac{t}{\alpha}\right)^2}\right](\omega)\\ &= \frac{1}{\pi\alpha}\cdot\alpha\mathcal{F}\left[\frac{1}{1+t^2}\right](\alpha\omega)\\ &= \mathrm{e}^{-\alpha|\omega|}.\end{aligned}$$

b) Mit dem Faltungssatz gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[\frac{1}{\pi}\frac{\alpha}{\alpha^2+t^2} * \frac{1}{\pi}\frac{\beta}{\beta^2+t^2}\right](\omega) &= \mathcal{F}\left[\frac{1}{\pi}\frac{\alpha}{\alpha^2+t^2}\right](\omega)\cdot\mathcal{F}\left[\frac{1}{\pi}\frac{\beta}{\beta^2+t^2}\right](\omega)\\ &= \mathrm{e}^{-\alpha|\omega|}\cdot\mathrm{e}^{-\beta|\omega|}\\ &= \mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)|\omega|}\end{aligned}$$

Man kann den Umkehrsatz verwenden oder die FT rekonstruieren.

(Es ist mit dem Umkehrsatz

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)|\omega|} &= \frac{1}{\pi}\mathcal{F}\left[\frac{1}{1+t^2}\right]((\alpha+\beta)\omega)\\ &= \frac{1}{\pi(\alpha+\beta)}\cdot(\alpha+\beta)\mathcal{F}\left[\frac{1}{1+t^2}\right]((\alpha+\beta)\omega)\\ &= \frac{\alpha+\beta}{\pi(\alpha+\beta)^2}\cdot\mathcal{F}\left[\frac{1}{1+((\alpha+\beta)^{-1}t)^2}\right](\omega)\\ &= \mathcal{F}\left[\frac{1}{\pi}\frac{\alpha+\beta}{(\alpha+\beta)^2+t^2}\right](\omega) \quad \Bigg)\end{aligned}$$

Somit ist

$$\frac{1}{\pi}\frac{\alpha}{\alpha^2+t^2} * \frac{1}{\pi}\frac{\beta}{\beta^2+t^2} = \frac{1}{\pi}\frac{\alpha+\beta}{(\alpha+\beta)^2+t^2}.$$

4. Aufgabe

8 Punkte

Mit

$$u(x,y) = \mathrm{e}^{X(x)+Y(y)}$$

ist

$$X'(x)\mathrm{e}^{X(x)+Y(y)} = 2xY'(y)\mathrm{e}^{X(x)+Y(y)}$$
$$X'(x) = 2xY'(y)$$

Separation:

$$\frac{X'(x)}{2x} = \lambda, \qquad Y'(y) = \lambda$$

Also:

$$X'(x) = 2\lambda x, X(0) = 0 \quad \Longrightarrow \; X(x) = \lambda x^2,$$
$$Y'(y) = \lambda, Y(0) = 0 \quad \Longrightarrow \; Y(y) = \lambda y$$

also sind

$$u(x,y) = \mathrm{e}^{\lambda(x^2+y)}$$

die gesuchten Lösungen.

5. Aufgabe

8 Punkte

1) Wahr.
2) Falsch.

   $\mathcal{L}[\cos]$ ist nicht monoton fallend.
3) Falsch.

   Betrachte die Funktion si.
4) Wahr.

   Sonst kann man nicht Autoradios hören.