Musterlösung Rechenteil — ITPDG, 07. Oktober 2009

1. Aufgabe

9 Punkte

Ermittlung der Lösung durch Trennung der Veränderlichen für Stellen x mit $y(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} \frac{y'}{1+y^2} &= -2x \\ \arctan y &= -x^2 + C \qquad C \in \mathbb{R} \\ y &= \tan(-x^2 + C) \qquad C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$y(0) = 0$ führt zu

$$0 = \tan(C) \qquad C \in \mathbb{R}$$

Mit $C = 0$ findet man eine Lösung

$$y = \tan(-x^2) = -\tan x^2,$$

die nach dem EES auch die einzige ist.
Der Definitionsbereich wird durch die Polstellen von tan bestimmt:

$$\begin{aligned} -\tfrac{\pi}{2} < x^2 &< \tfrac{\pi}{2} \\ 0 \leq |x| &< \sqrt{\tfrac{\pi}{2}} \\ x &\in \left]-\sqrt{\tfrac{\pi}{2}}, \sqrt{\tfrac{\pi}{2}}\right[\end{aligned}$$

Der maximale Definitionsbereich der Lösung ist gleich $]-\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{\pi}{2}}[$.

2. Aufgabe

11 Punkte

Aus

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(2-\lambda)^2(1-\lambda) - (1-\lambda) = 0$$

$$((2-\lambda)^2 - 1)(1-\lambda) = 0$$

$$(\lambda^2 - 4\lambda + 3)(1-\lambda) = 0$$

$$(\lambda-1)(\lambda-3)(1-\lambda) = 0$$

$$(\lambda-1)^2(\lambda-3) = 0$$

ergeben sich die Eigenwerte $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = 3$.

Eigenraum zu $\lambda_{1,2} = 1$ ist span $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Eigenraum zu $\lambda_3 = 3$ ist span $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$,

Für jeden Eigenwert sind algebraische und geometrische Vielfachheit gleich.

Damit können wir drei linear unabhängige Lösungen schnell anschreiben:

$$\vec{y}_1(t) == \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0) \end{pmatrix}, \quad \vec{y}_2(t) = \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\vec{y}_3(t) = \mathrm{e}^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad .$$

Die allgemeine Lösung lautet dann

$$\vec{y}(t) = C_1 \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0) \end{pmatrix} + C_2 \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 \mathrm{e}^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad .$$

3. Aufgabe 9 Punkte

Mit $X(s) := \mathcal{L}[x](s)$ ergibt sich im Laplace-Bereich

$$s^2X + 4sX - 5X = 6\mathrm{e}^{-s}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{6\mathrm{e}^{-s}}{s^2+4s-5} \\ &= \frac{6\mathrm{e}^{-s}}{(s+5)(s-1)} \quad . \end{aligned}$$

Partialbruchzerlegung (mit Zuhaltemethode)

$$\frac{1}{(s+5)(s-1)} = \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{s+5} + \frac{1}{s-1}\right).$$

Rücktransformation:

$$\begin{aligned} \frac{6}{(s+5)(s-1)}\mathrm{e}^{-s} &= \mathrm{e}^{-s}\left(-\frac{1}{s+5} + \frac{1}{s-1}\right) \\ &= \mathrm{e}^{-s}\mathcal{L}\left[-\mathrm{e}^{-5t} + \mathrm{e}^{t}\right](s) \\ &= \mathcal{L}\left[u_1(t)\left(-\mathrm{e}^{-5(t-1)} + \mathrm{e}^{t-1}\right)\right] \end{aligned}$$

Also lautet die Lösung

$$x(t) = u_1(t)\left(-\mathrm{e}^{-5(t-1)} + \mathrm{e}^{t-1}\right).$$

4. Aufgabe 11 Punkte

a) Ansatz: $u(x,t) = X(x)T(t)$
DGL: $X''(x)T(t) - X(x)T'(t) + 2X(x)T(t) = 0$
Division der DGL durch Produkt $X(x)T(t)$ und Separation:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} - 2 \implies \frac{X''(x)}{X(x)} =: \lambda = \frac{T'(t)}{T(t)} - 2$$

DGLn in X und T:

$$\begin{aligned} X''(x) - \lambda X(x) &= 0, \\ T'(t) - (\lambda+2)\lambda T(t) &= 0. \end{aligned}$$

Die Lösung für T lautet:

$$T(t) = T(0)\mathrm{e}^{(\lambda+2)t}.$$

Die Randbedingung ist eine Bedingung für $X(x)$:

$$X(0)T(t) = X(\pi)T(t) = 0$$

. Entweder ist T die Nullfunktion (und damit $u(x,t) = 0$), oder es folgt $X(0) = X(\pi) = 0$.

Fallunterscheidung für λ:

(a) $\lambda > 0 :\ X(x) = c_0 \mathrm{e}^{\sqrt{\lambda}x} + c_1 \mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}x}$. Randbedingung ergibt $c_0 = c_1 = 0$, also $X(x) = 0$, also $u(x,t) = 0$.

(b) $\lambda = 0 :\ X(x) = c_2 x + c_3$. Randbedingung ergibt $c_2 = c_3 = 0$, also $X(x) = 0$, also $u(x,t) = 0$.

(c) $\lambda < 0 :\ X(x) = c_4 \cos\sqrt{-\lambda}x + c_5 \sin\sqrt{-\lambda}x$.
Randbedingung ergibt $c_4 = 0$.
$c_5 \neq 0$ nur möglich, wenn $\sin\sqrt{-\lambda}\pi = 0$,
wenn es also ein $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, gibt mit $\lambda = -n^2$.
Dann ist $T(t) = T(0)\mathrm{e}^{(2-n^2)t}$.

Die nicht-verschwindenden Lösungen von der Form $X(x)T(t)$ mit $X(0) = X(\pi) = 0$ sind die Funktionen $u_n(x,t)$ mit

$$u_n(x,t) := C_n \mathrm{e}^{(2-n^2)t} \sin nx, \quad C_n \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{N}, n > 0$$

b) Zur Erfüllung der Bedingung $u(x,0) = \sin 2x$ für die Anfangsauslenkung muss für $u(x,t)$ eine Superposition der $u_n(x,t)$ angesetzt werden:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \mathrm{e}^{(2-n^2)t} \sin nx.$$

Dann sind Zahlen C_n zu finden, so dass

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin nx = \sin 2x$$

gilt. Daraus folgt

$$C_2 = 1, \quad C_k = 0, \quad k \in \mathbb{N}, k \neq 2$$

und schließlich

$$u(x,t) = \mathrm{e}^{-2t} \sin 2x$$