Musterlösung Verständnisteil — ITPDG, 07. Oktober 2009

1. Aufgabe

5 Punkte

Als eine Lösung des AWPs errät man die konstante Lösung $y = 2$.
Wir schreiben die DGL um:

$$y' = y^2 - 4.$$

Die rechte Seite wird als Funktion $G(x, y)$ auf $\mathbb{R}^2$ angesehen. G ist auf ganz $\mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar.

Nach dem EES geht damit durch den Punkt $(0, 2)$ genau eine Lösungskurve. Der geratenen Lösung entspricht die Gerade $y = 2$. Damit ist die Lösung $y(x) = 2$ die einzige Lösung des AWPs.

2. Aufgabe

9 Punkte

a) $\lambda = 1, 2$, $\mu = 3$: keine Resonanz
$y_{\text{part}}(x) = (Ax + B)\mathrm{e}^{3x}$

b) $\lambda = \pm 2\mathrm{i}$, $\mu = 1$: keine Resonanz
$y_{\text{part}}(x) = A \sin x + B \cos x$

c) $\lambda = 0, 1$, $\mu = 1$ und $\mu = 0$: beide Terme mit Resonanz
$y_{\text{part}}(x) = x(Ax^2 + Bx + C)\mathrm{e}^x + x(Dx^3 + Ex^2 + Fx + G)$

3. Aufgabe

9 Punkte

Berechnung der Übertragungsfunktion $H(s)$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[a_{\text{in}}](s) \cdot H(s) &= \mathcal{L}[a_{\text{out}}](s) \\
\frac{\omega}{s^2+\omega^2} \cdot H(s) &= \frac{2s\omega}{(s^2+\omega^2)^2} \\
H(s) &= \frac{2s}{s^2+\omega^2}
\end{aligned}$$

Für die Antwort $b_{\text{out}}(t)$ ist dann

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[b_{\text{out}}](s) &= \mathcal{L}[b_{\text{in}}](s) \cdot H(s) \\
&= \frac{1}{s} \cdot \frac{2s}{s^2+\omega^2} \\
&= \frac{2}{s^2+\omega^2} \\
&= \frac{2}{\omega} \cdot \frac{\omega}{s^2+\omega^2},
\end{aligned}$$

schließlich

$$b_{\text{out}}(t) = \frac{2}{\omega} \cdot \sin \omega t.$$

4. Aufgabe

10 Punkte

$$xu_{yy} + yu_{xx} = 0 \implies xY'' + yX'' = 0$$
$$-\frac{X''}{x} = \frac{Y''}{y} =: \lambda$$
$$X''(x) = -\lambda x \text{ und } Y''(y) = \lambda y$$
$$X(x) = -\frac{\lambda}{6}x^3 + Ax + B, \text{ und } Y(y) = \frac{\lambda}{6}y^3 + Cy + D$$
$$u(x,y) = -\frac{\lambda}{6}x^3 + Ax + B + \frac{\lambda}{6}y^3 + Cy + D$$

5. Aufgabe

8 Punkte

a) Falsch.

Das Fundamentalsystem wird mit Hauptvektorlösungen gebildet.

b) Wahr.

$\mathcal{L}[1](s)$ ist nicht beschränkt.

c) Falsch.

Betrachte die Funktion $\frac{1}{1+t^2}$.

d) Falsch.

Eine stetige und monoton fallende Funktion, die nicht die Nullfunktion ist, kann nicht zwei Nullstellen haben, geschweige denn beliebig viele.