Musterlösung Rechenteil — ITPDG, 17. Februar 2010

1. Aufgabe

10 Punkte

Aus

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 & 8 \\ -1 & -1-\lambda & -4 \\ 0 & 0 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} \implies \ 0 &= (3-\lambda)(-1-\lambda)(-3-\lambda) - 4(-3-\lambda)(-1) \\ &= (-3-\lambda)\big((3-\lambda)(-1-\lambda)+4\big) \\ &= (-3-\lambda)\big(\lambda^2-2\lambda+1\big) \\ &= (-3-\lambda)(\lambda-1)^2 \end{aligned}$$

ergeben sich die Eigenwerte $\lambda_1 = -3$ und $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$.
Eigenraum zum Eigenwert -3 ergibt sich als Raum der Lösungen $v \in \mathbb{R}^3$ von

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 & 8 \\ -1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zu $\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$.
Eigenraum zum Eigenwert 1 ergibt sich als Raum der Lösungen $v \in \mathbb{R}^3$ von

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zu $\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$.
Dieser Eigenraum besitzt nur Dimension 1, folglich ist ein Hauptvektor h zum Eigenwert 1 zu suchen:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} h = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es ist

$$h = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{C}$$

Damit können wir die allgemeine Lösung anschreiben:

$$\vec{y}(t) = C_1 \mathrm{e}^{-3t} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 \mathrm{e}^{t} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \mathrm{e}^{t} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{C}$$

2. Aufgabe

9 Punkte

Mit $X(s) := \mathcal{L}[x](s)$ ergibt sich im Laplace-Bereich

$$s^2 X + sX - 6X = 30 \frac{\mathrm{e}^{-s}}{s+1}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{30\mathrm{e}^{-s}}{(s+1)(s^2+s-6)} \\ &= \frac{30\mathrm{e}^{-s}}{(s+1)(s+3)(s-2)} \quad . \end{aligned}$$

Partialbruchzerlegung (mit Zuhaltemethode)

$$\frac{30}{(s+1)(s+3)(s-2)} = -\frac{5}{s+1} + \frac{3}{s+3} + \frac{2}{s-2}$$

und Rücktransformation:

$$\begin{aligned} \frac{30\mathrm{e}^{-s}}{(s+1)(s+3)(s-2)} &= \mathrm{e}^{-s} \left(-\frac{5}{s+1} + \frac{3}{s+3} + \frac{2}{s-2} \right) \\ &= \mathrm{e}^{-s} \mathcal{L} \left[-5\mathrm{e}^{-t} + 3\mathrm{e}^{-3t} + 2\mathrm{e}^{2t} \right](s) \\ &= \mathcal{L} \left[u_1(t)(-5\mathrm{e}^{-(t-1)} + 3\mathrm{e}^{-3(t-1)} + 2\mathrm{e}^{2(t-1)}) \right](s) \\ x(t) &= u_1(t) \left(-5\mathrm{e}^{-(t-1)} + 3\mathrm{e}^{-3(t-1)} + 2\mathrm{e}^{2(t-1)} \right) \end{aligned}$$

3. Aufgabe

9 Punkte

Mit $U(k,t) := \mathcal{F}[u(.,t)](k) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x$ ist

$$\begin{aligned} \partial_t U(k,t) &= 2\mathrm{i}kU(k,t) \\ U(k,0) &= \pi\mathrm{e}^{-|k|} \end{aligned}$$

Allgemeine Lösung der gewöhnlichen DGL in U bzgl. der Variablen t

$$U(k,t) = \pi\mathrm{e}^{-|k|}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}kt}.$$

Rücktrafo mit der Umkehrformel:

$$\begin{aligned} u(-x,t) &= \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}[U(k,t)](x) \\ &= \frac{1}{2}\mathcal{F}[\mathrm{e}^{-|k|}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}kt}](x) \\ &= \frac{1}{2}\mathcal{F}[\mathrm{e}^{-|k|}](x-2t) \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{1+(x-2t)^2} \\ &= \frac{1}{1+(x-2t)^2} \end{aligned}$$

Es ist also

$$u(x,t) = \frac{1}{1+(-x-2t)^2} = \frac{1}{1+(x+2t)^2}.$$

4. Aufgabe

12 Punkte

Ansatz: $u(x,t) = X(x)T(t)$
DGL: $X''(x)T(t) - X(x)T'(t) = 0$
Für $u(x,t) \neq 0$ ist Division der DGL durch Produkt $X(x)T(t)$ und Separation statthaft:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} \implies \frac{X''(x)}{X(x)} =: \lambda = \frac{T'(t)}{T(t)}$$

DGLn in X und T:

$$\begin{aligned} X''(x) - \lambda X(x) &= 0, \\ T'(t) - \lambda T(t) &= 0. \end{aligned}$$

Die Lösung für T lautet:

$$T(t) = T(0)\mathrm{e}^{\lambda t}.$$

Die Randbedingung ist eine Bedingung für $X(x)$:

$$X'(0)T(t) = X'(\pi)T(t) = 0.$$

Es folgt $X'(0) = X'(\pi) = 0$.

Fallunterscheidung für λ:

a) $\lambda > 0 :\ \ X(x) = c_0 \mathrm{e}^{\sqrt{\lambda}x} + c_1 \mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}x}$. Damit $X'(x) = \lambda c_0 \mathrm{e}^{\sqrt{\lambda}x} - \lambda c_1 \mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}x}$. Randbedingungen ergeben $c_0 = c_1$ und $c_1 = 0$, also $X(x) = 0$, also $u(x,t) = 0$. Widerspruch.

b) $\lambda = 0 :\ \ X(x) = c_2 x + c_3$. Damit $X'(x) = c_2$ Randbedingungen ergeben nur $c_2 = 0$. c_3 bleibt offen. Es ist hier $X(x) = c_3,\ c_3 \in \mathbb{R}$.

c) $\lambda < 0 :\ X(x) = c_4 \cos\sqrt{-\lambda}x + c_5 \sin\sqrt{-\lambda}x$.
Dann $X'(x) = \sqrt{-\lambda}(-c_4 \sin\sqrt{-\lambda}x + c_5 \cos\sqrt{-\lambda}x)$
Randbedingung ergibt $c_5 = 0$.
$c_4 \neq 0$ und damit $u(x,t) \neq 0$ nur möglich, wenn $\sin\sqrt{-\lambda}\pi = 0$, wenn es also ein $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, gibt mit $\lambda = -n^2$. Dann ist $X(x) = c_4 \cos\sqrt{-\lambda}x$
Dann ist $T(t) = T(0)\mathrm{e}^{-n^2 t}$.

Man hat als nicht-verschwindende Lösungen mit $u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0$ die Funktionen 1 (aus dem Fall $\lambda = 0$) und $u_n(x,t)$ mit

$$u_n(x,t) := \mathrm{e}^{-n^2 t}\cos nx, \quad C_n \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{N}, n > 0$$

Zur Erfüllung von $u(x,0) = \sin 3x$ Superposition der $u_n(x,t)$:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = C_0 \cdot 1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \mathrm{e}^{-n^2 t}\cos nx.$$

Zahlen C_n aufsuchen mit

$$u(x,0) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos nx = 5 + 2\cos 3x$$

Es folgt

$$C_0 = 5, \quad C_3 = 2, \quad C_k = 0, \quad k \in \mathbb{N}, k \neq 3.$$

Somit ist eine Lösung des RWP

$$u(x,t) = 5 + 2\mathrm{e}^{-9t}\cos 3x$$