Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik WS 09/10

A. Gündel-v. Hofe 7. April 2010

April – Klausur (Rechenteil)
Integraltransformationen und partielle Differentialgleichungen für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen ist nur die **auf der ISIS-Kursseite angebotene** Laplacetabelle zugelassen. Taschenrechner und Formelsammlungen sind nicht zugelassen. Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Rechenaufgaben. Geben Sie immer den **vollständigen Rechenweg** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

Die Gesamtklausur ist mit 40 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 12 von 40 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	4	Σ

1. Aufgabe

10 Punkte

Berechnen Sie die allgemeine Lösung für das Differentialgleichungssystem

$$\vec{y}\,'(t) = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 8 \\ -1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \vec{y}(t)$$

2. Aufgabe

9 Punkte

Ermitteln Sie die Lösung für das Anfangswertsproblem

$$x''(t) + x'(t) - 6x(t) = 5\delta(t-2), \qquad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0.$$

Dabei ist $\delta(t-2)$ die bei $t = 2$ konzentrierte Delta-Funktion.

3. Aufgabe

9 Punkte

Lösen Sie das AWP

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}, \qquad u(0,x) = \mathrm{e}^{-x^2/2}, \qquad x \in \mathbb{R},\ t \geq 0$$

mit Hilfe der Fouriertransformation.
Hinweise: Stellen Sie dazu erst ein AWP für die Funktion $U(t,k)$ mit

$$U(t,k) := \mathcal{F}[u(t,\cdot)](k) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} u(t,x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x$$

auf.
Es gilt die Beziehung

$$\mathcal{F}\left[\mathrm{e}^{-x^2/2}\right](k) = \sqrt{2\pi}\mathrm{e}^{-k^2/2}.$$

4. Aufgabe

12 Punkte

Lösen Sie mit Hilfe des Separationsansatzes das Rand-Anfangswertproblem in $u(x,t)$:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + u(x,t) = 0,$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial u(\pi,t)}{\partial x} = 0, \quad u(x,0) = \cos x + 2\cos 3x$$