Musterlösung Rechenteil — ITPDG, 7. April 2010

1. Aufgabe

10 Punkte

Aus

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 & 8 \\ -1 & 1-\lambda & -4 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} \implies 0 &= (5-\lambda)(1-\lambda)(-1-\lambda) - 4(-1-\lambda)(-1) \\ &= (-1-\lambda)\big((5-\lambda)(1-\lambda)+4\big) \\ &= (-1-\lambda)\big(\lambda^2-6\lambda+9) \\ &= (-1-\lambda)(\lambda-3)^2 \end{aligned}$$

ergeben sich die Eigenwerte $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$.
Eigenraum zum Eigenwert -1 ergibt sich als Raum der Lösungen $v \in \mathbb{R}^3$ von

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 & 8 \\ -1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zu $\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$.
Eigenraum zum Eigenwert 3 ergibt sich als Raum der Lösungen $v \in \mathbb{R}^3$ von

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zu $\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$.
Dieser Eigenraum besitzt nur Dimension 1, folglich ist ein Hauptvektor h zum Eigenwert 3 zu suchen:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} h = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es ist

$$h = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{C}$$

Damit können wir die allgemeine Lösung anschreiben:

$$\vec{y}(t) = C_1 \mathrm{e}^{-t} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 \mathrm{e}^{3t} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \mathrm{e}^{3t} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{C}$$

2. Aufgabe

9 Punkte

Mit $X(s) := \mathcal{L}[x](s)$ ergibt sich im Laplace-Bereich

$$\begin{aligned} s^2 X + sX - 6X &= 5\mathrm{e}^{-2s} \\ (s^2 + s - 6)X &= 5\mathrm{e}^{-2s} \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{5\mathrm{e}^{-2s}}{(s^2 + s - 6)} \\ &= \frac{5\mathrm{e}^{-2s}}{(s+3)(s-2)} \quad . \end{aligned}$$

Partialbruchzerlegung (mit Zuhaltemethode)

$$\frac{5}{(s+3)(s-2)} = -\frac{1}{s+3} + \frac{1}{s-2}$$

und Rücktransformation:

$$\begin{aligned} \frac{5\mathrm{e}^{-s}}{(s+3)(s-2)} &= \mathrm{e}^{-2s} \left(-\frac{1}{s+3} + \frac{1}{s-2} \right) \\ &= \mathrm{e}^{-2s} \mathcal{L} \left[-\mathrm{e}^{-3t} + \mathrm{e}^{2t} \right](s) \\ &= \mathcal{L} \left[u_2(t)(-\mathrm{e}^{-3(t-2)} + \mathrm{e}^{2(t-2)}) \right](s) \\ x(t) &= u_2(t) \left(-\mathrm{e}^{-3(t-2)} + \mathrm{e}^{2(t-2)} \right) \end{aligned}$$

3. Aufgabe
9 Punkte

Mit $U(k,t) := \mathcal{F}[u(.,t)](k) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x$ ist

$$\begin{aligned}
\partial_t U(k,t) &= -\frac{k^2}{2} U(k,t) \\
U(k,0) &= \mathcal{F}[\mathrm{e}^{-x^2/2}](k) = \sqrt{2\pi}\mathrm{e}^{-k^2/2}
\end{aligned}$$

Allgemeine Lösung der gewöhnlichen DGL in U bzgl. der Variablen t

$$U(k,t) = \sqrt{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{k^2}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{k^2}{2}t} = \sqrt{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{t+1}{2}k^2}.$$

Rücktrafo mit der Umkehrformel:

$$\begin{aligned}
u(-x,t) &= \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}[U(k,t)](x) \\
&= \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\left[\sqrt{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{t+1}{2}k^2}\right](x) \\
&= \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\left[\sqrt{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\sqrt{t+1}k\right)^2}\right](x) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi(t+1)}}\mathcal{F}\left[\mathrm{e}^{-k^2/2}\right]\left(\tfrac{x}{\sqrt{t+1}}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi(t+1)}}\sqrt{2\pi}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{t+1}}\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{t+1}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{t+1}}\right)^2\right]
\end{aligned}$$

Es ist also

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t+1}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{-x}{\sqrt{t+1}}\right)^2\right] = \frac{1}{\sqrt{t+1}}\exp\left[-\frac{x^2}{2(t+1)}\right].$$

Probe:

$$u_x(x,t) = -u(x,t)\frac{x}{t+1}, \qquad u_{xx}(x,t) = u(x,t)\left[\frac{x^2}{(t+1)^2} - \frac{1}{t+1}\right]$$
$$u_t(x,t) = u(x,t)\left[-\frac{2}{t+1} + \frac{x^2}{2(t+1)^2}\right]$$
$$u_t = \frac{1}{2}u_{xx}$$

4. Aufgabe
12 Punkte

Ansatz: $u(x,t) = X(x)T(t)$
DGL: $X''(x)T(t) - X(x)T'(t) + X(x)T(t) = 0$
Für $u(x,t) \neq 0$ ist Division der DGL durch Produkt $X(x)T(t)$ und Separation statthaft:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} - \frac{T'(t)}{T(t)} + 1 = 0 \implies \frac{X''(x)}{X(x)} =: \lambda = -1 + \frac{T'(t)}{T(t)}$$

DGLn in X und T:

$$\begin{aligned}
X''(x) - \lambda X(x) &= 0, \\
T'(t) - (1+\lambda)T(t) &= 0.
\end{aligned}$$

Die Randbedingung ist eine Bedingung für $X(x)$:

$$X'(0)T(t) = X'(\pi)T(t) = 0.$$

Es folgt $X'(0) = X'(\pi) = 0$.

Fallunterscheidung für λ:

a) $\lambda > 0: \;\; X(x) = c_0 \mathrm{e}^{\sqrt{\lambda}x} + c_1 \mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}x}$. Damit $X'(x) = \lambda c_0 \mathrm{e}^{\sqrt{\lambda}x} - \lambda c_1 \mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}x}$. Randbedingungen ergeben $c_0 = c_1$ und $c_1 = 0$, also $X(x) = 0$, also $u(x,t) = 0$. Widerspruch.

b) $\lambda = 0: \;\; X(x) = c_2 x + c_3$. Damit $X'(x) = c_2$ Randbedingungen ergeben nur $c_2 = 0$. c_3 bleibt offen. Es ist hier $X(x) = c_3 = c_3 \cdot 1, \; c_3 \in \mathbb{R}$ mit der konstanten Funktion 1.

c) $\lambda < 0: \;\; X(x) = c_4 \cos\sqrt{-\lambda}x + c_5 \sin\sqrt{-\lambda}x$.
Dann $X'(x) = \sqrt{-\lambda}(-c_4 \sin\sqrt{-\lambda}x + c_5 \cos\sqrt{-\lambda}x)$
Randbedingung ergibt $c_5 = 0$.
$c_4 \neq 0$ und damit $u(x,t) \neq 0$ nur möglich, wenn $\sin\sqrt{-\lambda}\pi = 0$,
wenn es also ein $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, gibt mit $\lambda = -n^2$. Dann ist $X(x) = c_4 \cos\sqrt{-\lambda}x$
Dann ist $T(t) = T(0)\mathrm{e}^{(1-n^2)t}$.

Man hat als nicht-verschwindende Lösungen mit $u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0$ die Funktionen 1 (aus dem Fall $\lambda = 0$) und $u_n(x,t)$ mit

$$u_n(x,t) := \mathrm{e}^{-(n^2-1)t} \cos nx, \quad C_n \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{N}, n > 0$$

Zur Erfüllung von $u(x,0) = \cos x + 2\cos 3x$ Superposition von 1 und der $u_n(x,t)$:

$$u(x,t) = C_0 \cdot 1 + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = C_0 \cdot 1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \mathrm{e}^{-(n^2-1)t} \cos nx, \quad C_n \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Zahlen C_n aufsuchen mit

$$u(x,0) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos nx = \cos x + 2\cos 3x$$

Es folgt

$$C_1 = 1, \quad C_3 = 2, \qquad C_k = 0, \quad k \in \mathbb{N}, \quad k \notin \{1,3\}.$$

Somit ist eine Lösung des RWP

$$u(x,t) = \cos x + 2\mathrm{e}^{-8t} \cos 3x$$