Musterlösung Verständnisteil — ITPDG, 7. April 2010

1. Aufgabe

10 Punkte

Mit TdV:

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{x}{y} \\ \int y \,\mathrm{d}y &= -\int x \,\mathrm{d}x \\ \tfrac{1}{2}y^2 &= -\tfrac{1}{2}x^2 + C, \quad C \in \mathbb{R} \\ y^2 &= -x^2 + \tilde{C}, \quad \tilde{C} \in \mathbb{R} \\ |y| &= \sqrt{-x^2 + \tilde{C}}, \quad \tilde{C} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Also ist für die gesuchte Lösung y des AWP die Alternative

$$y(x) = \sqrt{-x^2 + \tilde{C}} \text{ oder } y(x) = -\sqrt{-x^2 + \tilde{C}}$$

mit geeignetem $\tilde{C} \in \mathbb{R}$ zutreffend.

Anpassung an AW:

$$1 = \pm\sqrt{\tilde{C}} \implies \tilde{C} = 1 \text{ und oberes Vorzeichen.}$$

Also ist eine Lösung

$$y(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

Diese Lösung ist definiert auf $]-1, 1[$, dort ist auch die Anfangsstelle 0 enthalten. (Es muss $y(x) \neq 0$ gelten, da sonst die DGL für $x = 1$ sinnlos wird.)
Zur Eindeutigkeit: Die rechte Seite $-\frac{x}{y}$ wird als Funktion $G(x, y)$ auf $\mathbb{R}^2$ angesehen. G ist in der oberen und in der unteren Halbebene, aber nicht auf der x-Achse differenzierbar. Nach dem EES geht damit durch den Punkt $(0, 1)$, der in der oberen Halbebene liegt, genau eine Lösungskurve.
Damit ist die Lösung $y(x) = \sqrt{1 - x^2}$ die *einzige* Lösung des AWPs.

2. Aufgabe

6 Punkte

Mit den in der Methode des *Ansatzes der rechten Seite* üblichen Bezeichnungen ist $\mu_1 = -2 + 3\mathrm{i}$, $\mu_2 = -2 - 3\mathrm{i}$.

Resonanz tritt ein, wenn μ_1 oder μ_2 Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist.

Da die DGL reell und von 2. Ordnung ist, ist ihr charakteristisches Polynom gleich

$$(\lambda - \mu_1)(\lambda - \mu_2) = \lambda^2 + 4\lambda + 13.$$

Damit gilt $\alpha = 4$, $\beta = 13$.

3. Aufgabe

8 Punkte

Übertragungsfunktion $H(s)$

$$\mathcal{L}[\mathrm{e}^{-t}](s) = \frac{1}{s+1}$$

a) LT der Erregung:

$$\mathcal{L}[t](s) = \frac{1}{s^2}$$

Faltung ist ein Produkt im Laplacebereich:

$$\frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{s+1} = \frac{1}{s^2(s+1)}$$

Rücktrafo via PBZ:

$$\frac{1}{s^2(s+1)} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s^2} + \frac{B}{s+1}$$
$$1 = A_1 s(s+1) + A_2(s+1) + Bs^2$$
$$A_1 = -1,\ A_2 = 1,\ B = 1 \text{(z.B. durch Koeffizientenvergleich)}$$
$$\frac{1}{s^2(s+1)} = -\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s+1} = \mathcal{L}[-1 + t + \mathrm{e}^{-t}](s)$$

Die Antwort ist $-1 + t + \mathrm{e}^{-t}$.

b) Gesuchte Erregung sei $b_{\text{in}}(t)$. Dann ist

$$B_{\text{in}}(s) \cdot \frac{1}{s+1} = \frac{6}{(s+1)^4}$$
$$B_{\text{in}}(s) = \frac{6}{(s+1)^3}$$
$$b_{\text{in}}(t) = 3t^2\mathrm{e}^{-t}.$$

Die erforderliche Erregung ist gleich $3t^2\mathrm{e}^{-t}$.

4. Aufgabe

8 Punkte

Partikuläre Lösung u_p z.B.

$$u_\mathrm{p}(x,t) = \mathrm{e}^{-x}.$$

Homogene Lösung:

$$\begin{gathered} X'(x)T(t) + X(x)T'(t) = 0 \\ \frac{X'}{X} = -\frac{T'}{T} =: \lambda \\ X(x) = X(0)\mathrm{e}^{\lambda x}, \quad T(t) = T(0)\mathrm{e}^{-\lambda t} \\ u_\mathrm{hom}(x,t) = u_\mathrm{hom}(0,0)\mathrm{e}^{\lambda(x-t)} \end{gathered}$$

Mit allgemeiner Lösung

$$u(x,t) = \mathrm{e}^{-x} + C\mathrm{e}^{\lambda(x-t)}, \quad C \in \mathbb{R}$$

in die Randbedingung:

$$\begin{gathered} \mathrm{e}^{-x} + C\mathrm{e}^{\lambda x} = 3\mathrm{e}^{-x} \\ C = 2, \quad \lambda = -1. \end{gathered}$$

Also:

$$u(x,t) = \mathrm{e}^{-x} + 2\mathrm{e}^{-(x-t)}.$$

5. Aufgabe

8 Punkte

a) Wahr.

Mit $y' = \ln y$ sichert EES Eindeutigkeit für $y > 0$.

b) Falsch.

Die Laplacetransformierte solcher Funktionen geht im Unendlichen gegen Null.

c) Wahr.

z.B. $f(t) = \mathrm{e}^{-t^2/2}$ (mit $C = \sqrt{2\pi}$ nach Konvention im Skript)

d) Wahr.

Da die DGL homogen ist, ist die Nullfunktion eine Lösung.