Technische Universität Berlin
Fakultät II
Institut für Mathematik
Dozentin Dr. G. Penn-Karras
Assistentin Dr. C. Papenfuß

SS 2010

ITPDG
Klausur Juli 10
Lösung Rechenteil

1. Aufgabe

12 Punkte

a) Die Eigenwerte der Koeffizientenmatrix berechnen sich zu

$$\det \begin{pmatrix} 6-\lambda & 4 \\ -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (6-\lambda)(2-\lambda)+4 = \lambda^2 - 8\lambda + 16$$

$$\lambda_{1/2} = 4 \pm \sqrt{16-16} = 4$$

Man findet einen Eigenvektor aus $\det(A-\lambda I)\vec{v}_1 = \vec{0}$:

$$\left(\begin{array}{rr|r} 2 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \text{z.B.} \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dazu berechnet man einen Hauptvektor aus $\det(A-\lambda I)\vec{v}_2 = \vec{v}_1$:

$$\left(\begin{array}{rr|r} 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \text{z.B.} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist damit:

$$\vec{x_h}(t) = c_1 e^{4t} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{4t} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

alternativ: Hauptvektor aus der Bedingung $\det(A-\lambda I)^2 \vec{v}_2 = \vec{0}$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{rr|r} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \text{z.B.} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Damit findet man als 2. Fundamentallösung:

$$\vec{x}_2(t) = e^{4t} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = e^{4t} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix} \right)$$

b) Partikuläre Lösung $\vec{x}_p(t)$ durch Variation der Konstanten

$$\text{Ansatz} \quad \vec{x}_p(t) = c_1(t)\begin{pmatrix} -2e^{4t} \\ e^{4t} \end{pmatrix} + c_2(t)\begin{pmatrix} (-1-2t)e^{4t} \\ te^{4t} \end{pmatrix}$$

Einsetzen in die DGl liefert die Bestimmungsgl. für die Konstanten:

$$W(t)\begin{pmatrix} \dot{c}_1 \\ \dot{c}_2 \end{pmatrix} = \vec{b}(t)$$

$$\begin{pmatrix} -2e^{4t} & (-1-2t)e^{4t} \\ e^{4t} & te^{4t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{c}_1 \\ \dot{c}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -25e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1-2t \\ 1 & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{c}_1 \\ \dot{c}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -25e^{-5t} \\ 0 \end{pmatrix} \quad +2\cdot 2.\ \text{Zeile}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{c}_1 \\ \dot{c}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -25e^{-5t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$1.\ \text{Zeile:} \quad \dot{c}_2 = 25e^{-5t} \quad \Rightarrow \quad c_2(t) = -5e^{-5t} + k_2$$

$$2.\ \text{Zeile:} \quad \dot{c}_1 = -25te^{-5t} \quad \Rightarrow \quad c_1(t) = 5te^{-5t} + e^{-5t} + k_1$$

$$\begin{aligned} \vec{x}_p(t) &= (5t+1)e^{-5t}e^{4t}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} - 5e^{-5t}e^{4t}\begin{pmatrix} -1-2t \\ t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -10t-2+5+10t \\ 5t+1-5t \end{pmatrix} e^{-t} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} \end{aligned}$$

Allgemeine Lösung des inhomogenen DGl-Systems:

$$\vec{x}(t) = c_1 e^{4t}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{4t}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

2. Aufgabe

9 Punkte

a) Exponential-Ansatz $y_h(x) = e^{\lambda x}$ für die homogene Lösung liefert

$$(\lambda^2 + \lambda - 2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1\ , \quad \lambda_2 = -2 \qquad \Rightarrow \qquad y_h(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$$

Ansatz der rechten Seite für eine partikuläre Lösung:
Es liegt keine Resonanz vor $\Rightarrow$ Ansatz:

$$\begin{aligned} y_p(x) &= A\sin x + B\cos x \\ y_p'(x) &= A\cos x - B\sin x \\ y_p''(x) &= -A\sin x - B\cos x\ . \end{aligned}$$

Einsetzen in die DGl liefert:

$$-A\sin x - B\cos x + A\cos x - B\sin x - 2A\sin x - 2B\cos x = 20\sin x$$

Koeffizientenvergleich liefert:

$$\begin{aligned} -3A - B = 20\ , \qquad & -3B + A = 0 \\ \Rightarrow \quad B = -2\ , \qquad & A = -6 \end{aligned}$$

Man erhält die allgemeine inhomogene Lösung

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} - 6\sin x - 2\cos x$$

b) i) Es liegt Resonanz mit einer einfachen Nullstelle vor.

$$y_p(x) = x\left(Ax^2 + Bx + C\right)e^x$$

ii) Es liegt keine Resonanz vor.

$$y_p(x) = e^x\,(A\cos x + B\sin x)$$

iii) Es liegt keine Resonanz vor.

$$y_p(x) = Ae^{-x}$$

3. Aufgabe

8 Punkte

Bezeichnung:

$$X(s) = \mathcal{L}[x(t)](s)$$

Die rechte Seite der DGl ist $b(t) = 4u_1(t)$.

Laplace-Transformation der DGl ergibt:

$$s^2X + 2sX = e^{-s}\frac{4}{s}\ .$$

$$\Rightarrow \quad X = e^{-s}\frac{4}{s^2(s+2)}$$

Partialbruchzerlegung ergibt:

$$\frac{4}{s^2(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+2} = \frac{(A+C)s^2 + (2A+B)s + 2B}{s^2(s+2)} = \frac{-1}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s+2}\ ,$$

also

$$\begin{aligned} X &= e^{-s}\left(\frac{-1}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s+2}\right) = e^{-s}\mathcal{L}\left[-1 + 2t + e^{-2t}\right](s) \\ &= \mathcal{L}\left[u_1(t)\left(-1 + 2(t-1) + e^{-2(t-1)}\right)\right](s) \end{aligned}$$

Rücktransformation liefert die gesuchte Lösung:

$$x(t) = u_1(t)\left(-1 + 2(t-1) + e^{-2(t-1)}\right)$$

4. Aufgabe

11 Punkte

a) Einsetzen des Separationsansatzes in die DGl liefert:

$$\frac{\ddot{T}}{T} = -\frac{X''}{X} = \lambda \in \mathbb{R}\ .$$

Periodisch in x sind die Lösungen nur für $\lambda \geq 0$.

Im Fall $\lambda > 0$ findet man:

$$\begin{aligned} T(t) &= Ae^{\sqrt{\lambda}t} + Be^{-\sqrt{\lambda}t} \\ X(x) &= C\cos\left(\sqrt{\lambda}x\right) + D\sin\left(\sqrt{\lambda}x\right) \ . \end{aligned}$$

Im Fall $\lambda = 0$ findet man:

$$\begin{aligned} T(t) &= A + Bt \\ X(x) &= C + Dx \ . \end{aligned}$$

Periodisch in x ist die Lösung nur für $D = 0$.

b) Im Fall $\lambda = 0$ erfüllt nur die triviale Lösung die Randbedingung.

Im Fall $\lambda > 0$ gilt:

$$\begin{aligned} u(0,t) = u(1,t) = 0 \ \Rightarrow \quad & X(0) = X(1) = 0 \\ X(0) = C\cos\left(\sqrt{\lambda}0\right) + D\sin\left(\sqrt{\lambda}0\right) &= C = 0 \\ X(1) = D\sin\left(\sqrt{\lambda}1\right) &= 0 \ . \end{aligned}$$

Entweder ist $D = 0$ (triviale Lösung) oder

$$\sqrt{\lambda} = k\pi \ , \quad k \in \mathbb{Z} \ .$$

Als Lösung erhält man:

$$u(x,t) = \sin(k\pi x)\left(\tilde{A}e^{k\pi t} + \tilde{B}e^{-k\pi t}\right) \ .$$

c) Die Randbedingung erfordert $\tilde{A} = 0$, also

$$u(x,t) = \sin(k\pi x)\left(\tilde{B}e^{-k\pi t}\right) \ .$$

Die allgemeine Lösung lautet:

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{B}_k \sin(k\pi x)\, e^{-k\pi t} \ .$$

d) Die Anfangsbedingung

$$u(x,0) = 2\sin(3\pi x) + 3\sin(4\pi x) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{B}_k \sin(k\pi x)$$

wird erfüllt, falls

$$\tilde{B}_3 = 2 \quad \text{und} \quad \tilde{B}_4 = 3 \ ,$$

also:

$$u(x,t) = 2\sin(3\pi x)\, e^{-3\pi t} + 3\sin(4\pi x)\, e^{-4\pi t} \ .$$