Technische Universität Berlin
Fakultät II
Institut für Mathematik
Dozentin Dr. G. Penn-Karras
Assistentin Dr. C. Papenfuß

SS 2010

ITPDG
Klausur Juli 10
Lösung Verständnisteil

1. Aufgabe

6 Punkte

a) Daraus, dass y_1 und y_2 ein Fundamentalsystem bilden, folgt, dass y_1 und y_2 linear unabhängig sind.
Die Wronskimatrix an der Stelle 2 ist

$$\begin{pmatrix} y_1(2) & y_2(2) \\ y_1'(2) & y_2'(2) \end{pmatrix} .$$

Wären $y_1(2) = 0$ und $y_2(2) = 0$, wäre $\det W(2) = 0$ im Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit von y_1 und y_2. Es kann also nicht $y_2(2) = 0$ gelten.

b) $y_2'(2) = 0$ ist möglich, da damit $W(t)$ nicht notwendig eine Nullzeile hat und daraus *nicht* $\det W(2) = 0$ folgt. $y_2'(2) = 0$ steht also nicht im Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit der Fundamentallösungen.

2. Aufgabe

8 Punkte

Das charakteristische Polynom muss die Nullstellen $3i$ und -1 haben.
Da die Koeffizienten der DGl reell sind, muss auch $-3i$ eine Nullstelle sein.
Die DGl ist 4. Ordnung, d.h. das charakteristische Polynom hat 4 Nullstellen.
Komplexe Nullstellen treten paarweise konjugiert komplex auf. Da nur 1 Nullstelle fehlt, muss diese reell sein.
Zu $\cos 2x$ gehören die Nullstellen $+2i$ und $-2i$, was nicht möglich ist.
$\cos 2x$ kann daher keine Fundamentallösung sein und läßt sich auch nicht als Linearkombination der Fundamentallösungen darstellen. $\cos 2x$ ist keine Lösung der DGl.

3. Aufgabe

8 Punkte

a) y_1 und y_2 erfüllen die DGl:

$$y_1'(t) = 1\ , \quad y_1''(t) = 0$$

$$y_1'' - \frac{2t+4}{t^2+4t}\, y_1' + \frac{2}{t^2+4t}\, y_1 = -\frac{2t+4}{t^2+4t} + \frac{2t+4}{t^2+4t} = 0$$

und

$$y_2'(t) = 2t\ , \quad y_2''(t) = 2$$

$$y_2'' - \frac{2t+4}{t^2+4t}\, y_2' + \frac{2}{t^2+4t}\, y_2 = 2 - 2t\frac{2t+4}{t^2+4t} + \frac{2t^2}{t^2+4t} = 0$$

Die Lösungen sind linear unabhängig, da

$$W(t) = \begin{pmatrix} t+2 & t^2 \\ 1 & 2t \end{pmatrix}$$

$$\det W(t) = (t+2)2t - t^2 = t^2 + 4t \neq 0 \quad \text{für} \quad t > 0$$

Die allgemeine Lösung lautet:

$$y(t) = C_1(t+2) + C_2 t^2\ .$$

b) Berechnen der Konstanten aus den Anfangswerten:

$$y(1) = C_1(1+2) + C_2 1^2 = 3C_1 + C_2 = 1$$

$$y'(t) = C_1 + 2tC_2$$

$$y'(1) = C_1 + 2C_2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad C_1 = \frac{2}{5}\ , \quad C_2 = -\frac{1}{5}\ .$$

Die Lösung des AWP's ist

$$y(t) = \frac{2}{5}(t+2) - \frac{1}{5}t^2\ .$$

4. Aufgabe

9 Punkte

a)

$$\begin{aligned} \sin t * f(t) &= t^2 \\ \Rightarrow \quad \mathcal{L}\left[\sin t * f(t)\right](s) &= \mathcal{L}\left[t^2\right](s) \\ \Leftrightarrow \quad \mathcal{L}\left[\sin t\right](s)\mathcal{L}\left[f(t)\right](s) &= \mathcal{L}\left[t^2\right](s) \quad \text{nach Faltungssatz} \\ \Leftrightarrow \quad \frac{1}{s^2+1}\mathcal{L}\left[f(t)\right](s) &= \frac{2}{s^3} \\ \Leftrightarrow \quad \mathcal{L}\left[f(t)\right](s) &= \frac{2}{s^3}\left(s^2+1\right) = \frac{2}{s} + \frac{2}{s^3} = \mathcal{L}\left[2+t^2\right](s) \end{aligned}$$

$f(t) = 2 + t^2$ nach Eindeutigkeitssatz

b)

$$\begin{aligned} &\mathcal{F}\left[\frac{3}{4t^2+4t+5}\right](\omega) \\ &= 3\mathcal{F}\left[\frac{1}{4\left((t+\frac{1}{2})^2+1\right)}\right](\omega) \\ &= \frac{3}{4}\mathcal{F}\left[\frac{1}{(t+\frac{1}{2})^2+1}\right](\omega) \\ &= \frac{3}{4}e^{i\frac{\omega}{2}}\mathcal{F}\left[\frac{1}{t^2+1}\right](\omega) \\ &= \frac{3}{4}\pi e^{i\frac{\omega}{2}-|\omega|} \end{aligned}$$

5. Aufgabe

9 Punkte

a) Die DGl ist separabel:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{x}}{x^2} &= \cos t \\ \Rightarrow \quad -\frac{1}{x} &= \sin t + C \\ \Rightarrow \quad x(t) &= -\frac{1}{\sin t + C} \end{aligned}$$

b) i)

$$x(0) = \frac{1}{2} = -\frac{1}{C} \quad \Rightarrow \quad C = -2$$

$$x(t) = -\frac{1}{\sin t - 2}$$

ii) Die Lösung ist stationär:

$$x(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{x}(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = 0 \quad \forall t$$

c) Die rechte Seite der DGl $G(x,t) = \cos(t)x^2$ ist stetig differenzierbar für alle $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, also auch in einer Umgebung der Anfangsbedingungen $(\frac{1}{2}, 0)$ und $(0,0)$. Nach Existenz- und Eindeutigkeitssatz haben daher beide AWP's eindeutige Lösungen.