Technische Universität Berlin
Fakultät II
Institut für Mathematik
Dozentin Dr. G. Penn-Karras
Assistentin Dr. C. Papenfuß

SS 2010

ITPDG
Klausur Oktober 10
Lösung Rechenteil

1. Aufgabe

6 Punkte

a) Die Eigenwerte der Koeffizientenmatrix berechnen sich zu

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \left((2-\lambda)^2 - 1\right)(1-\lambda) = \left((\lambda)^2 - 4\lambda + 3\right)(1-\lambda)$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1 \ , \quad \lambda_3 = 3$$

Zum doppelten Eigenwert $\lambda = 1$ findet man 2 linear unabhängige Eigenvektoren: Aus $\det(A - \lambda_1 I)\vec{v} = \vec{0}$ folgt

$$\det(A - 1I)\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \quad v_1^1 + v_1^2 = 0 \ ,$$

was z.B. erfüllt wird von

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \ .$$

Zum einfachen Eigenwert $\lambda = 3$ findet man:

$$\det(A - 3I)\vec{v_3} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \vec{v_3} = \vec{0}$$

$\Rightarrow$

$$-v_3^1 + v_3^2 = 0 \qquad (1)$$

$$-2v_3^3 = 0 \qquad (2)$$

$$\Rightarrow$$

$$\vec{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ .$$

Die allgemeine Lösung ist damit:

$$\vec{x}(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) Die Konstanten werden aus dem Anfangswert berechnet:

$$\vec{x}(0) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 &= 3 \\ -c_1 - c_2 + c_3 &= 1 \\ c_2 &= 1 \end{aligned}$$

mit der Lösung

$$\begin{aligned} c_1 &= 1 \\ c_2 &= 1 \\ c_3 &= 1 \ . \end{aligned}$$

Die Lösung des AWP's lautet:

$$\vec{x}(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Aufgabe

12 Punkte

Zunächst wird die Lösung der homogenen Gleichung bestimmt. Die charakteristische Gleichung liefert

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + \alpha = 0$$

mit der Lösung

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 - \alpha}$$

a) $\alpha = -3$:

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 + 3} = -1 \pm 2$$

liefert die Eigenwerte

$$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = -3$$

und damit die homogene Lösung

$$y_h(t) = C_1 e^{-3t} + C_2 e^t \ .$$

Die partikuläre Lösung kann man durch Ansatz vom Typ der rechten Seite finden. Es liegt Resonanz vor mit der einfachen Nullstelle $\lambda_1 = 1$. Daher

$$y_p(t) = Ate^t \ .$$

Einsetzen in die DGl liefert

$$\begin{aligned} A\left(e^t + e^t + te^t\right) + 2A\left(e^t + te^t\right) - 3tAe^t &= e^t \\ 4Ae^t = e^t \quad \Rightarrow \quad A &= \frac{1}{4} \ , \end{aligned}$$

d.h. die partikuläre Lösung lautet

$$y_p(t) = \frac{1}{4}te^t$$

und die allgemeine Lösung

$$y_h(t) = C_1e^{-3t} + C_2e^t + \frac{1}{4}te^t \ .$$

b) $\alpha = 1$:

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm 0 \ ,$$

also ein doppelter Eigenwert.

Die homogene Lösung dazu ist

$$y_h(t) = C_1e^{-t} + C_2te^{-t} \ .$$

Die partikuläre Lösung kann man durch Ansatz vom Typ der rechten Seite finden. Es liegt keine Resonanz vor. Daher

$$y_p(t) = Ae^t \ .$$

Einsetzen in die DGl liefert

$$\begin{aligned} Ae^t + 2Ae^t + Ae^t &= e^t \\ \Rightarrow \quad A &= \frac{1}{4} \ , \end{aligned}$$

d.h. die partikuläre Lösung lautet

$$y_p(t) = \frac{1}{4}e^t$$

und die allgemeine Lösung

$$y_h(t) = C_1e^{-t} + C_2te^{-t} + \frac{1}{4}e^t \ .$$

c) $\alpha = 5$:

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-5} = -1 \pm 2i \ .$$

Die homogene reelle Lösung dazu ist

$$y_h(t) = C_1 e^{-t} \sin(2t) + C_2 t e^{-t} \cos(2t) \ .$$

Die partikuläre Lösung kann man durch Ansatz vom Typ der rechten Seite finden. Es liegt keine Resonanz vor. Daher

$$y_p(t) = Ae^t \ .$$

Einsetzen in die DGl liefert

$$\begin{aligned} Ae^t + 2Ae^t + 5Ae^t &= e^t \\ \Rightarrow \quad A &= \frac{1}{8} \ , \end{aligned}$$

d.h. die partikuläre Lösung lautet

$$y_p(t) = \frac{1}{8} e^t$$

und die allgemeine Lösung

$$y_h(t) = C_1 e^{-t} \sin(2t) + C_2 t e^{-t} \cos(2t) + \frac{1}{8} e^t \ .$$

3. Aufgabe

9 Punkte

Definiere $\mathcal{L}[u(t)](s) = U(s)$.

Laplace-Transformation der DGl ergibt:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\dot{u}](s) &= s\mathcal{L}[u](s) - u(0) \ , \\ \mathcal{L}[\ddot{u}](s) &= s^2\mathcal{L}[u](s) - su(0) - \dot{u}(0) \ . \\ s^2U(s) - 3s - 3 + 2sU(s) - 2 \cdot 3 - 3U(s) &= e^{-3s} \ , \\ U(s)(s^2 + 2s - 3) &= 9 + 3s + e^{-3s}, \\ U(s) &= \frac{9 + 3s + e^{-3s}}{s^2 + 2s - 3} \ . \end{aligned}$$

Als Nullstellen des Nenners findet man $s_1 = -3$, $s_2 = 1$. Also

$$\begin{aligned} s^2 + 2s - 3 &= (s+3)(s-1) \ , \\ U(s) &= \frac{3(3+s)}{(s+3)(s-1)} + \frac{e^{-3s}}{(s+3)(s-1)} \ , \end{aligned}$$

Partialbruchzerlegung des Nenners liefert

$$\begin{aligned} \frac{1}{(s+3)(s-1)} &= \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+3} \\ \Rightarrow \quad A &= \frac{1}{4} \ , \quad B = -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{(s+3)(s-1)} &= \frac{1}{4} \frac{1}{s-1} - \frac{1}{4} \frac{1}{s+3} \ , \end{aligned}$$

Damit haben wir für die Laplace-Transformierte U:

$$U(s) = \frac{3}{s-1} + \frac{e^{-3s}}{4}\left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+3}\right)$$

und Rücktransformation liefert

$$u(t) = 3e^t + \frac{1}{4}u_3(t)(e^{t-3} - e^{-3(t-3)}) = 3e^t + \frac{1}{4}u_3(t)(e^{t-3} - e^{9-3t}) \; .$$

4. Aufgabe

13 Punkte

a) Einsetzen des Produktansatzes in die PDGl liefert

$$T(t)X''(x) = \dot{T}(t)X(x) + T(t)X(x)$$

und für $T(t)X(x) \neq 0$:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{\dot{T}(t)}{T(t)} + 1 \; .$$

Beide Seiten müssen konstant sein.

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = C \; , \quad \frac{\dot{T}(t)}{T(t)} + 1 = C$$

Es muss $C \leq 0$ sein, da Lösungen, die periodisch in x sind, gesucht sind.
Fall I: $C = 0$, d.h.

$$X''(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad X(x) = ax + b \; .$$

Periodisch ist die Lösung nur für $a = 0$, $X(x) = b$.

Fall II: $C < 0$: Die Lösung lautet

$$X(x) = A\cos(\sqrt{-C}x) + B\sin(\sqrt{-C}x)$$
$$T(t) = e^{(C-1)t}$$
$$u(x,t) = \left(A\cos(\sqrt{-C}x) + B\sin(\sqrt{-C}x)\right)e^{(C-1)t} \; .$$

b) Fall I: Die 1. Randbedingung liefert $b = 0$, also $X(x) = 0$, d.h. nur die triviale Lösung.
Fall II: Die 1. Randbedingung liefert

$$u(0,t) = 0 \quad \Rightarrow \quad X(0) = 0 = A$$
$$X(x) = B\sin(\sqrt{-C}x)$$

und die 2. RB

$$u(\frac{\pi}{2},t) = 0 \quad \Rightarrow \quad X(\frac{\pi}{2}) = 0 = B\sin(\sqrt{-C}\frac{\pi}{2}) \; .$$

Für $B = 0$ wäre u die triviale Lösung. Deshalb kommt nur in Frage

$$\sin(\sqrt{-C}\frac{\pi}{2}) = 0$$
$$\Rightarrow \quad \sqrt{-C}\frac{\pi}{2} = n\pi$$
$$\sqrt{-C} = 2n \ , \quad C = -4n^2 \quad n \in \mathbb{N}$$

und damit als Lösung

$$u_n(x,t) = B_n \sin(2nx) e^{(-4n^2-1)t} \quad n \in \mathbb{N}$$

Die allgemeine Lösung ist die Superposition dieser Lösungen

$$u(x,t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} B_n \sin(2nx) e^{(-4n^2-1)t}$$

c) Auswerten der Anfangsbedingung:

$$u(x,0) = 10\sin(2x) + \sin(6x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} B_n \sin(2nx)$$
$$B_1 = 10 \ , \quad B_3 = 1 \ , \quad B_n = 0 \quad \text{für} \quad n \neq 1,3$$

und die Lösung des Anfangs-Randwertproblems ist

$$u(x,t) = 10\sin(2x)e^{-5t} + \sin(6x)e^{-37t}$$