Technische Universität Berlin
Fakultät II
Institut für Mathematik
Dozentin Dr. G. Penn-Karras
Assistentin Dr. C. Papenfuß

SS 2010

ITPDG
Klausur Oktober 10
Lösung Verständnisteil

1. Aufgabe

12 Punkte

a) Aus dem Faktor $\sin t$ folgt, daß i ein Eigenwert sein muß. Damit ist auch $-i$ ein Eigenwert.
Der Faktor t^2 zeigt, daß die Nullstelle dreifach ist, d.h.

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = i \ , \quad \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = -i \ .$$

Es gibt mindestens 6 Eigenwerte. Daraus folgt, daß die kleinste Ordnung 6 ist.
Aus dem charakteristischen Polynom schließt man:

$$P(\lambda) = (\lambda - i)^3(\lambda + i)^3 = (\lambda^2 + 1)^3 = \lambda^6 + 3\lambda^4 + 3\lambda^2 + 1 \ .$$

Daher lautet die DGl:

$$y^{(6)} + 3y'''' + 3y'' + y = 0 \ .$$

b) $\cos t$, $\sin t$, $t \cos t$, $t \sin t$, $t^2 \cos t$, $t^2 \sin t$.

c) i) Es liegt Resonanz vor mit einer dreifachen Nullstelle des charakteristischen Polynoms. Deshalb lautet der Ansatz:

$$y_p(t) = t^3 \left(A \cos t + B \sin t\right) \ .$$

ii) Es liegt keine Resonanz vor. Der Ansatz lautet

$$y_p(t) = at^2 + bt + c \ .$$

2. Aufgabe

6 Punkte

a) falsch

b) falsch

c) wahr

3. Aufgabe

12 Punkte

a) Trennung der Variablen und Integration beider Seiten liefert

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y^2} &= 2x \\ -\frac{1}{y} &= x^2 + C \\ y(x) &= -\frac{1}{x^2 + C} \end{aligned}$$

b) i)

$$y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad y'(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad y(x) \equiv 0 \ .$$

Das Existenzintervall ist $I = \mathbb{R}$.

ii)

$$\begin{aligned} y(0) = 1 = -\frac{1}{C} \quad &\Rightarrow \quad C = -1 \ . \\ y(x) &= -\frac{1}{x^2 - 1} \end{aligned}$$

Das Existenzintervall ist $I =]-1, 1[$.

iii)

$$\begin{aligned} y(0) = -1 = -\frac{1}{C} \quad &\Rightarrow \quad C = 1 \ . \\ y(x) &= -\frac{1}{x^2 + 1} \end{aligned}$$

Das Existenzintervall ist $I = \mathbb{R}$.

c) Die rechte Seite der DGl $G(x,y) = 2xy^2$ ist stetig nach x und y differenzierbar für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Nach Existenz- und Eindeutigkeitssatz existiert damit für jedes der AWP's lokal eine eindeutige Lösung.

4. Aufgabe

10 Punkte

a)

$$\mathcal{L}[e^t(\cos t - \sin t)](s) = \mathcal{L}[\cos t - \sin t](s-1) = \frac{s-1-1}{(s-1)^2+1} = \frac{s-2}{s^2-2s+2}$$

b) 1. Differenzieren und Partialbruchzerlegung liefert:

$$Z(s) = \frac{d}{ds}Y(s) = -2\frac{1}{s^3+s} = -2\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}\right) \ .$$

2. Laplace-Rücktransformation von Z:

$$\begin{aligned} z(t) = \mathcal{L}^{-1}[Z(s)](t) = -2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}\right](t) &= -2\,(1-\cos t) \\ z(t) &= -2 + 2\cos t \ . \end{aligned}$$

3. Nach Multiplikationssatz gilt

$$\begin{aligned} -Z(s) = -\frac{d}{ds}Y(s) = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}[y(t)](s) &= \mathcal{L}[ty(t)](s) \\ z(t) &= -ty(t) \\ y(t) = -\frac{z(t)}{t} &= \frac{2-2\cos t}{t} \end{aligned}$$