Technische Universität Berlin
Fakultät II
Institut für Mathematik
Dozentin Dr. G. Penn-Karras
Assistentin Dr. C. Papenfuß

WS 2011

ITPDG
Klausur Februar 11
Lösung

Rechenteil

1. Aufgabe

8 Punkte

a) Die Eigenwerte der Koeffizientenmatrix berechnen sich zu

$$\det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -1 & 5-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)(5-\lambda)+1 = \lambda^2 - 8\lambda + 16$$

mit den Lösungen

$$\lambda_{1/2} = 4 \pm \sqrt{16-16} = 4$$

Man findet einen Eigenvektor aus $(A-\lambda I)\vec{v}_1 = \vec{0}$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\vec{v}_1 = \vec{0} \quad \to \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Dazu berechnet man einen Hauptvektor aus $(A-\lambda I)\vec{v}_2 = \vec{v}_1$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \to \quad \text{z.B.} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist damit:

$$\vec{y}(t) = c_1 e^{4t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{4t}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

alternativ: Hauptvektor aus der Bedingung $(A-\lambda I)^2\vec{v}_2 = \vec{0}$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \text{z.B.} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

b) Auswerten der Anfangsbedingung:

$$\vec{y}(0) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

liefert $c_1 = 1$, $c_2 = 1$.

Die Lösung des AWP's ist

$$\vec{y}(t) = e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{4t} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

2. Aufgabe

11 Punkte

Bezeichnung:

$$X(s) = \mathcal{L}[x(t)](s)$$

Laplace-Transformation der DGl ergibt:

$$\begin{aligned} s^2X(s) - \dot{x}(0) - sx(0) + 4X(s) = s^2X(s) - s + 4X(s) &= 8\frac{e^{-3s}}{s^2} \\ X(s)\left(s^2+4\right) &= s + \frac{8e^{-3s}}{s^2} \end{aligned}$$

Die Laplace-Transformierte $X(s)$ ergibt sich zu

$$X(s) = \frac{s}{s^2+4} + \frac{8e^{-3s}}{s^2(s^2+4)} = \frac{s}{s^2+4} + 8e^{-3s}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+4}\right) .$$

Laplace-Rücktransformation ergibt:

$$x(t) = \cos(2t) + u_3(t)\left(2(t-3) - \sin(2(t-3))\right)$$

3. Aufgabe

12 Punkte

a) Einsetzen des Separationsansatzes in die DGl liefert:

$$\frac{\dot{T}}{2tT} = \frac{X''}{X} = \lambda \in \mathbb{R} .$$

mit der Lösung

$$\begin{aligned} X(x) &= C_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}x} \\ \dot{T}(t) = \lambda 2tT(t) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\dot{T}(t)}{T(t)} &= \lambda 2t \\ T(t) &= C_3 e^{\lambda t^2} . \end{aligned}$$

Periodisch in x sind die Lösungen nur für $\lambda \leq 0$.

Im Fall $\lambda < 0$ findet man als reelle Lösung

$$X(x) = C\cos\left(\sqrt{-\lambda}x\right) + D\sin\left(\sqrt{-\lambda}x\right) \ ,$$
$$u(x,t) = e^{\lambda t^2}\left(A\cos(\sqrt{-\lambda}x) + B\sin(\sqrt{-\lambda}x)\right)$$

Im Fall $\lambda = 0$ findet man:

$$T(t) = C_4$$
$$X(x) = C_5 + C_6 x \ .$$

Periodisch in x ist die Lösung nur für $C_6 = 0$.

b) Im Fall $\lambda = 0$ erfüllt nur die triviale Lösung die Randbedingung.

Im Fall $\lambda < 0$ gilt:

$$u(0,t) = u(1,t) = 0 \ \Rightarrow \quad X(0) = X(1) = 0$$
$$X(0) = C\cos\left(\sqrt{-\lambda}0\right) + D\sin\left(\sqrt{-\lambda}0\right) = C = 0$$
$$X(1) = D\sin\left(\sqrt{-\lambda}1\right) = 0 \ .$$

Entweder ist $D = 0$ (triviale Lösung) oder

$$\sqrt{-\lambda} = k\pi \ , \quad k \in \mathbb{N} \ .$$

Als Lösung erhält man:

$$u_k(x,t) = \sin(k\pi x)\, e^{-k^2\pi^2 t^2} \ .$$

c) Die allgemeine Lösung lautet:

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{B}_k \sin(k\pi x)\, e^{-k^2\pi^2 t^2} \ .$$

Die Anfangsbedingung

$$u(x,0) = 5\sin(3\pi x) + 2\sin(\pi x) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{B}_k \sin(k\pi x)$$

wird erfüllt, falls

$$\tilde{B}_3 = 5 \quad \text{und} \quad \tilde{B}_1 = 2 \quad \text{sonst } 0 \ ,$$

also:

$$u(x,t) = 5\sin(3\pi x)\, e^{-9\pi^2 t^2} + 2\sin(\pi x)\, e^{-\pi^2 t^2} \ .$$

Verständnisteil

4. Aufgabe

10 Punkte

a) Aus dem Summanden $e^{-t}\cos(2t)$ folgt, daß $-1+2i$ ein Eigenwert sein muß. Damit ist auch $-1-2i$ ein Eigenwert.
Der Summand 5 zeigt, daß auch 0 ein Eigenwert ist.

$$\lambda_1 = -1+2i\ , \quad \lambda_2 = -1-2i\ , \quad \lambda_3 = 0\ .$$

Es gibt mindestens 3 Eigenwerte. Daraus folgt, daß die kleinste Ordnung 3 ist.
Aus dem charakteristischen Polynom schließt man:

$$P(\lambda) = (\lambda+1-2i)(\lambda+1+2i)\lambda = \lambda^3 + 2\lambda^2 + 5\lambda\ .$$

Daher lautet die DGl:

$$y''' + 2y'' + 5y' = 0\ .$$

b) $e^{-t}\cos(2t)$, $e^{-t}\sin(2t)$, 1

5. Aufgabe

9 Punkte

a)

$$\begin{aligned} P(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 \quad &\Rightarrow \quad \lambda_1 = 1\ , \quad \lambda_2 = 2 \\ &y_p(t) = A\cos t + B\sin t \end{aligned}$$

Keine Resonanz.

b)

$$\begin{aligned} P(\lambda) = \lambda^2 - 1 \quad &\Rightarrow \quad \lambda_1 = 1\ , \quad \lambda_2 = -1 \\ &y_p(t) = t(At+B)e^t \end{aligned}$$

Resonanz mit $\lambda = 1$.

c)

$$\begin{aligned} P(\lambda) = \lambda^2 + \lambda \quad &\Rightarrow \quad \lambda_1 = 0\ , \quad \lambda_2 = -1 \\ &y_p(t) = At + Be^{2t} \end{aligned}$$

Resonanz mit $\lambda = 0$.

6. Aufgabe

12 Punkte

a)

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t u^2 e^{t-u} du\right](s) = \mathcal{L}\left[(x^2 * e^x)(t)\right](s) =$$
$$\mathcal{L}\left[t^2\right](s)\mathcal{L}\left[e^t\right](s) = \frac{2}{s^3}\frac{1}{s-1} \ .$$

b)

$$\mathcal{L}\left[g(t)\right](s) = \mathcal{L}\left[(x * f(x))(t)\right](s) = \mathcal{L}\left[(t\right](s)\mathcal{L}\left[f(t)\right](s) = \frac{1}{s^2}\mathcal{L}\left[f(t)\right](s)$$

$$s^2\mathcal{L}\left[g(t)\right](s) = \mathcal{L}\left[f(t)\right](s) \ .$$

Laplace-Rücktrafo mit $g(0) = 0 = g'(0)$ liefert als (eindeutige) Lösung

$$g''(t) = f(t) \ .$$

c)

$$\mathcal{F}\left[\frac{2}{9t^2+6t+2}\right](\omega) = \mathcal{F}\left[\frac{2}{(3t+1)^2+1}\right](\omega)$$
$$= \frac{2}{3}\mathcal{F}\left[\frac{1}{(t+1)^2+1}\right](\frac{\omega}{3})$$
$$= \frac{2}{3}e^{i\omega/3}\mathcal{F}\left[\frac{1}{t^2+1}\right](\frac{\omega}{3}) = \frac{2}{3}e^{i\omega/3}\pi\exp(-\frac{|\omega|}{3}) \ .$$