Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik WS 10/11

Penn-Karras 6. April 2011

April – Klausur
ITPDG für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4-Blatt mit Notizen sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen. Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Auf jedes Blatt bitte Name und Matrikelnummer schreiben. Mit Bleistift oder Rotstift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Geben Sie im Rechenteil immer den **vollständigen Rechenweg** und im Verständ-nisteil, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze, aber vollständige Begründung** an. **Insbesondere soll immer klar werden, welche Sätze oder Theoreme verwendet wurden!** Ohne Begründung bzw. Rechenweg gibt es **keine Punkte!**

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Gesamtklausur ist mit 30 Punkten bestanden, wobei in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 10 Punkten erreicht werden müssen.

Korrektur

1	2	3	Σ

4	5	6	7	Σ

Rechenteil

1. Aufgabe

9 Punkte

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DGl

$$y''' - 5y'' + 7y' - 3y = 0 \; .$$

b) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y''' - 5y'' + 7y' - 3y = 0 \; , \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = -2 \; , \quad y''(0) = -7$$

2. Aufgabe

10 Punkte

a) Zeigen Sie, dass die vektorwertigen Funktionen

$$\vec{x}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{x}_2(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} \\ -1 \end{pmatrix}$$

ein Fundamentalsystem zu dem DGl-System

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2t} & \frac{1}{2t^2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2t} \end{pmatrix} \vec{x}$$

bilden.

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des DGl-Systems

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2t} & \frac{1}{2t^2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2t} \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$$

für $t > 0$.

3. Aufgabe

12 Punkte

a) Bestimmen Sie alle (reellen) Lösungen der Differentialgleichung

$$u_t = 2u_{xx}$$

der Gestalt $u(x,t) = X(x)T(t)$.

b) Welche der in a) bestimmten Lösungen erfüllen weiterhin die Randbedingungen

$$u_x(0,t) = 0 \; , \quad u_x(\pi,t) = 0 \; ?$$

Verständnisteil

4. Aufgabe 7 Punkte

Begründen Sie jeweils Ihre Antworten.

a) Kann $y(t) = t\cos t$ eine Lösung einer homogenen linearen Differentialgleichung 3. Ordnung mit reellen konstanten Koeffizienten sein?

b) Wenn eine homogene lineare Differentialgleichung mit reellen konstanten Koeffizienten von $y_1(t) = \cos 2t$ gelöst wird, so wird diese Differentialgleichung auch von $y_2(t) = \sin 2t$ gelöst.

c) Kann $y_1(t) = \cos 2t$ und $y_2(t) = \sin 2t$ ein Fundamentalsystem einer homogenen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit reellen konstanten Koeffizienten bilden?

5. Aufgabe 7 Punkte

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DGl

$$y' = 3x^2\cos^2(y) \ .$$

b) Lösen Sie die Anfangswertprobleme

$$y' = 3x^2\cos^2(y)\ , \quad y(0) = 0 \quad \text{und} \quad y' = 3x^2\cos^2(y)\ , \quad y(0) = \frac{\pi}{2}\ .$$

c) Sind für beide Anfangswertprobleme die Lösungen jeweils eindeutig? Begründen Sie Ihre Antwort.

Hinweis: $(\tan t)' = \frac{1}{\cos^2(t)}$.

6. Aufgabe 9 Punkte

a) Finden Sie eine Lösung $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ der Gleichung

$$\int_0^t f'(u)f(t-u)\,\mathrm{d}u = t^2, \quad f(0) = 0\ .$$

b) Wenn eine reelle, stetige und nicht-negative Funktion $f(t)$ mit $f(t) = 0$ für $t < 0$ eine Fouriertransformierte besitzt, hat dann $f(t)$ auch eine Laplacetransformierte? Begründen Sie Ihre Antwort.

7. Aufgabe 8 Punkte

a) Ein kausales LTI-System $\mathcal{S}$ antwortet auf die Eingangsfunktion $f(t) = 1$ mit der Ausgangsfunktion $\mathcal{S}[f](t) = t^2$. Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion und die Impulsantwort.

b) Berechnen Sie folgende Fourier-Transformierte:

$$\mathcal{F}\left[\frac{3}{4t^2 - 4t + 2}\right](\omega)\ .$$

Hierzu können Sie die Beziehung $\mathcal{F}\left[\frac{1}{1+t^2}\right](\omega) = \pi e^{-|\omega|}$ verwenden.