Technische Universität Berlin
Fakultät II
Institut für Mathematik
Dozentin Dr. G. Penn-Karras
Assistentin Dr. C. Papenfuß

WS 2011

ITPDG
Klausur April 11
Lösung

Rechenteil

1. Aufgabe

9 Punkte

a) Ansatz $y(t) = e^{\lambda t}$ eingesetzt in die DGl liefert die charakteristische Gleichung

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 7\lambda - 3 = 0$$

mit den Lösungen $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = 3$.
Damit lautet die allgemeine Lösung der DGl

$$y(t) = C_1 e^t + C_2 t e^t + C_3 e^{3t}$$

b)

$$\begin{aligned} y'(t) &= C_1 e^t + C_2(te^t + e^t) + C_3 3e^{3t} \\ y''(t) &= C_1 e^t + C_2(te^t + 2e^t) + C_3 9e^{3t} \end{aligned}$$

Einsetzen der Anfangsbedingungen liefert:

$$\begin{aligned} y(0) &= -1 = C_1 + 0 + C_3 \\ y'(0) &= -2 = C_1 + C_2 + 3C_3 \\ y''(0) &= -7 = C_1 + 2C_2 + 9C_3 \end{aligned}$$

mit der Lösung $C_1 = 0$, $C_2 = 1$, $C_3 = -1$.
Die Lösung des AWP's lautet

$$y(t) = te^t - e^{3t} \; .$$

2. Aufgabe

10 Punkte

1. Die Dimension des Lösungsraums zu diesem System ist 2, und 2 beliebige linear unabhängige Lösungen bilden ein Fundamentalsystem. Um zu beweisen, dass $(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ eine Lösungsbasis zum gegebenen System bilden, müssen wir zeigen:

   i) Diese Funktionen sind Lösungen.

   ii) Diese Funktionen sind linear unabhängig.

   i)

$$\dot{\vec{x}}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{2t} & \frac{1}{2t^2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2t} + \frac{1}{2t} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

   Die Funktion $\vec{x}_1$ ist eine Lösung.

$$\dot{\vec{x}}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{t^2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{2t} & \frac{1}{2t^2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{t} \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2t^2} - \frac{1}{2t^2} \\ \frac{1}{2t} - \frac{1}{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{t^2} \\ 0 \end{pmatrix} .$$

   Auch $\vec{x}_2$ ist eine Lösung.

   ii) Für die Wronskideterminante gilt:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{t} \\ t & -1 \end{pmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0 ,$$

   also sind diese Funktionen linear unabhängig und bilden ein Fundamentalsystem.

2. Bestimmung einer speziellen Lösung $\vec{x}_p$ des inhomogenen Systems durch Variation der Konstanten:
   Der Ansatz: $\vec{x}_p(t) = c_1(t)\vec{x}_1(t) + c_2(t)\vec{x}_2(t)$ führt auf

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{t} \\ t & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{c}_1(t) \\ \dot{c}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \quad & \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{t} \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{c}_1(t) \\ \dot{c}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

   Auflösen ergibt: $\dot{c}_2(t) = 0$ und $\dot{c}_1(t) = t$. Durch Integration erhalten wir $c_2(t) = 0,\ c_1(t) = \frac{t^2}{2}$.

   Wir erhalten als partikuläre Lösung

$$\vec{x}_p(t) = c_1(t)\vec{x}_1(t) + c_2(t)\vec{x}_2(t) = \frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{t^2}{2} \\ \frac{t^3}{2} \end{pmatrix} .$$

   Die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL lautet also:

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_p(t) + C_1\vec{x}_1(t) + C_2\vec{x}_2(t) = \begin{pmatrix} \frac{t^2}{2} \\ \frac{t^3}{2} \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{t} \\ -1 \end{pmatrix} .$$

3. Aufgabe

12 Punkte

a) Einsetzen des Separationsansatzes in die DGl liefert:

$$\frac{\dot{T}}{2T} = \frac{X''}{X} = \lambda \in \mathbb{R}$$

und damit die zwei gewöhnlichen DGl's:

$$\dot{T} = 2\lambda T \ , \quad X'' = \lambda X$$

mit den Lösungen

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$$
$$T(t) = C_3 e^{2\lambda t} \ .$$

Fall I: $\lambda > 0$: Die Lösung oben ist reell und

$$u(x,t) = \bar{C}_1 e^{\sqrt{\lambda}x + 2\lambda t} + \bar{C}_2 e^{-\sqrt{\lambda}x + 2\lambda t} \ .$$

Fall II: $\lambda = 0$:

$$\dot{T} = 0 \quad \Rightarrow \quad T(t) = C_1$$
$$X'' = 0 \quad \Rightarrow \quad X(x) = C_2 x + C_3 \ .$$

$$u(x,t) = \bar{C}_2 x + \bar{C}_3 \ .$$

Im Fall III: $\lambda < 0$ findet man als reelle Lösung

$$X(x) = C\cos\left(\sqrt{-\lambda}x\right) + D\sin\left(\sqrt{-\lambda}x\right) \ ,$$
$$u(x,t) = e^{2\lambda t}\left(A\cos(\sqrt{-\lambda}x) + B\sin(\sqrt{-\lambda}x)\right) \ .$$

b) Fall $\lambda > 0$:

$$u_x(0,t) = 0 \quad \Rightarrow \quad X'(0) = 0 \quad \Rightarrow C_1\sqrt{\lambda} - C_2\sqrt{\lambda} = 0 \quad \Rightarrow C_1 = C_2$$
$$u_x(\pi,t) = 0 \quad \Rightarrow \quad X'(\pi) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1\sqrt{\lambda}e^{\sqrt{\lambda}\pi} - C_2\sqrt{\lambda}e^{-\sqrt{\lambda}\pi} = 0 \quad \Rightarrow$$
$$C_1 = C_2 e^{-2\sqrt{\lambda}\pi} \quad \Rightarrow C_1 = C_2 = 0$$

Im Fall $\lambda > 0$ erfüllt nur die konstante Lösung die Randbedingung.

Fall $\lambda = 0$:

$$u_x(0,t) = 0 \quad \Rightarrow \quad X'(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0$$
$$u_x(\pi,t) = 0 \quad \Rightarrow \quad X'(\pi) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0$$

$$u(x,t) = \bar{C}_3 \ .$$

Im Fall $\lambda = 0$ erfüllt nur die konstante Lösung die Randbedingung.

Im Fall $\lambda < 0$ gilt:

$$u_x(0,t) = 0 \quad \Rightarrow \quad X'(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad -C\sqrt{\lambda}\sin 0 + D\sqrt{\lambda}\cos 0 = D\sqrt{\lambda} = 0 \quad \Rightarrow \quad D = 0 \ ,$$
$$u_x(\pi,t) = 0 \quad \Rightarrow \quad X'(\pi) = 0 \quad \Rightarrow \quad -C\sqrt{\lambda}\sin\pi = 0$$

ist automatisch erfüllt.

Als Lösung erhält man:

$$u(x,t) = e^{2\lambda t}A\cos(\sqrt{-\lambda}x) \ .$$

Verständnisteil

4. Aufgabe

7 Punkte

a) Nein.
   Es müssten i und $-i$ jeweils doppelte Nullstellen des charakteristischen Polynoms sein. 4 Nullstellen sind nicht möglich bei einer DGl 3. Ordnung.

b) Wahr.
   Zu $\sin 2x$ gehören als Nullstellen des charakteristischen Polynoms $2i$ und $-2i$. Die reelle Linearkombination der Exponentialfunktionen ergibt $\sin 2x$ und $\cos 2x$. $\cos 2x$ löst daher ebenfalls die DGL.

c) $y_1(t) = \cos 2t$ und $y_2(t) = \sin 2t$ sind linear unabhängig und sind Lösungen einer DGl mit den Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\lambda = \pm 2i$, z.B.

$$\begin{aligned} P(\lambda) = (\lambda - 2i)(\lambda + 2i) = \lambda^2 + 4 \\ y'' + 4y = 0 \end{aligned}$$

   Zwei linear unabhängige Lösungen bilden ein Fundamentalsystem einer DGl 2. Ordnung.

5. Aufgabe

7 Punkte

a) Die DGl ist separabel:

$$\frac{y'}{\cos^2(y)} = 3x^2$$

   liefert

$$\begin{aligned} \tan y = x^3 + C \\ y(x) = \arctan(x^3 + C)\ . \end{aligned}$$

b) $y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \arctan C = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 0$ und die Lösung ist

$$y(x) = \arctan(x^3)\ .$$

   $y(0) = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad y'(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad y(x) \equiv \frac{\pi}{2}$: stationäre Lösung.

c) Die Lösungen sind eindeutig nach EES, denn die rechte Seite der DGl $F(x, y) = 3x^3 \cos^2 y$ ist stetig differenzierbar nach x und nach y für alle $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$.

6. Aufgabe

9 Punkte

a) Das Integral lässt sich als eine Faltung auffassen:

$$(f' * f)(t) = t^2 \ .$$

Mit $F(s) = \mathcal{L}[f](s)$ ist

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f'] \cdot \mathcal{L}[f] &= \mathcal{L}[t^2](s) \\ sF(s) \cdot F(s) &= \frac{2}{s^3} \\ [F(s)]^2 &= \frac{2}{s^4} \\ F(s) &= \pm\frac{\sqrt{2}}{s^2} \\ f(t) &= \pm\sqrt{2}t \ . \end{aligned}$$

b) Für die Fouriertransformierte von f gilt

$$\mathcal{F}[f](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-\imath\omega t} = \int_{0}^{\infty} f(t)e^{-\imath\omega t}\,\mathrm{d}t.$$

und die Laplacetransformierte

$$\mathcal{L}[f](t) = \int_{0}^{\infty} f(t)e^{-st} = \mathcal{F}[f](i\omega).$$

existiert damit nach Voraussetzung.

7. Aufgabe

8 Punkte

a) Für die Impulsantwort $h(t)$ gilt

$$\int_0^t h(u)du = (h * 1)(t) = t^2, \text{ also } h(t) = 2t.$$

Die entsprechende Übertragungsfunktion ist

$$H(s) = \mathcal{L}\Big[2t\Big](s) = \frac{2}{s^2},$$

b)

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left[\frac{3}{4t^2 - 4t + 2}\right](\omega) &= \mathcal{F}\left[\frac{3}{(2t-1)^2 + 1}\right](\omega) \\ &= \frac{3}{2}\mathcal{F}\left[\frac{1}{(t-1)^2+1}\right](\frac{\omega}{2}) \\ = \frac{3}{2}e^{-i\omega/2}\mathcal{F}\left[\frac{1}{t^2+1}\right](\frac{\omega}{2}) &= \frac{3}{2}e^{-i\omega/2}\pi\exp(-\frac{|\omega|}{2}) \ . \end{aligned}$$