Technische Universität Berlin
Fakultät II
Institut für Mathematik
Dozentin Dr. G. Penn-Karras
Assistentin Dr. C. Papenfuß

SS 2011

ITPDG
Klausur Juli 11
Lösung

Rechenteil

1. Aufgabe

8 Punkte

Die Eigenwerte der Koeffizientenmatrix berechnen sich zu

$$0 = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 4 & 0 \\ -1 & 6-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)\left(\lambda^2 - 8\lambda + 16\right) = (2-\lambda)(\lambda-4)^2$$

$$\lambda_1 = 2 \ , \quad \lambda_{2,3} = 4$$

Man findet den Eigenvektor zu $\lambda_1 = 2$ aus $(A - \lambda_1 I)\vec{v}_1 = \vec{0}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \text{z.B.} \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{y}_1(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Man findet den Eigenvektor zu $\lambda_2 = 4$ aus $\det(A - \lambda_2 I)\vec{v}_2 = \vec{0}$:

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \text{z.B.} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{y}_2(t) = e^{4t} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dazu berechnet man einen Hauptvektor aus $\det(A-\lambda_2 I)\vec{w}=\vec{v}_2$:

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \vec{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \text{z.B.} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{y}_3(t) = e^{4t}\left(\vec{w} + t\vec{v}_2\right) = e^{4t}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) .$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist damit:

$$\vec{y}(t) = C_1 e^{2t}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{4t}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^{4t}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) .$$

Auswerten der Anfangsbedingung:

$$\vec{y}(0) = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ergibt das Gleichungssystem für die Konstanten

$$\begin{aligned} 4C_2 &= -4 \\ 2C_2 + C_3 &= 0 \\ C_1 + C_2 &= 0 \end{aligned}$$

mit der Lösung

$$C_1 = 1 \ , \quad C_2 = -1 \ , \quad C_3 = 2$$

Die Lösung des AWPs lautet

$$\vec{y}(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - e^{4t}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 2e^{4t}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) .$$

2. Aufgabe

10 Punkte

a) Die charakteristische Gleichung liefert

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + \alpha = 0$$

mit der Lösung

$$\lambda_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4-\alpha}$$

(a) $\alpha = 0$:

$$\lambda_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4} = -2 \pm 2$$

liefert die Eigenwerte

$$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = -4$$

und damit die Lösung

$$y(t) = C_1 + C_2 e^{-4t} \ .$$

(b) $\alpha = 4$:

$$\lambda_{1,2} = -2 \pm 0 \ ,$$

also ein doppelter Eigenwert.
Die Lösung lautet

$$y(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 t e^{-2t} \ .$$

(c) $\alpha = 8$:

$$\lambda_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4-8} = -2 \pm 2i \ .$$

Die reelle Lösung lautet

$$y(t) = C_1 e^{-2t} \sin(2t) + C_2 t e^{-2t} \cos(2t) \ .$$

b) (a) $y'' + 4y' = 2t + 3: \quad \alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = -4$
Resonanz mit $\lambda_1 = 0$

$$y_p(t) = t(At + B) \ .$$

(b) $y'' + 4y' + 8y = \cos(2t): \quad \alpha = 8 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = -2 \pm 2i$
keine Resonanz

$$y_p(t) = A\cos(2t) + B\sin(2t) \ .$$

3. Aufgabe

12 Punkte

a) Definiere die Laplace-Transformierten $X(s)$ von $x(t)$ und $B(s)$ von $b(t)$. Laplace-Transformation der DGl ergibt:

$$\begin{aligned} s^2X(s) + \omega^2 X(s) &= B(s) \\ X(s) &= \frac{1}{s^2+\omega^2} B(s) \end{aligned}$$

Man liest die Übertragungsfunktion ab:

$$H(s) = \frac{1}{s^2+\omega^2} \ .$$

Die Impulsantwort ist die Rücktransformierte der Übertragungsfunktion, also

$$h(t) = \frac{1}{\omega}\sin(\omega t) \ .$$

b) Die Inhomogenität läßt sich schreiben als

$$b(t) = 2t - 2(t-1)u_1(t)$$

mit der Laplace-Transformierten

$$B(s) = \frac{2}{s^2} - e^{-s}\mathcal{L}[2t](s) = \frac{2}{s^2}\left(1-e^{-s}\right)$$

Damit

$$X(s) = \frac{2}{s^2(s^2+4)}\left(1-e^{-s}\right)$$

Partialbruchzerlegung:

$$\begin{aligned} \frac{1}{s^2(s^2+4)} = \frac{As+B}{s^2} + \frac{Cs+D}{s^2+4} &= \frac{As^3+Bs^2+4As+4B+Cs^3+Ds^2}{s^2(s^2+4)} \quad \Rightarrow \\ A+C=0\ , \quad B+D=0\ , \quad 4A=0\ , \quad 4B=1 &\quad \Rightarrow \\ C=0\ , \quad D=-\frac{1}{4}\ , \quad A=0\ , \quad B=\frac{1}{4} & \end{aligned}$$

$$\frac{1}{s^2(s^2+4)} = \frac{1}{4s^2} - \frac{1}{4(s^2+4)}$$

$$X(s) = \left(1+e^{-s}\right)\left(\frac{1}{2s^2} - \frac{1}{2(s^2+4)}\right)$$

Laplace-Rücktransformation liefert die Lösung

$$x(t) = \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\sin(2t) - u_1(t)\left(\frac{1}{2}(t-1) - \frac{1}{4}\sin(2(t-1))\right)$$

Verständnisteil

4. Aufgabe

10 Punkte

a) Aus dem Summanden $e^{-t}\sin(2t)$ folgt, dass $-1+2i$ ein Eigenwert sein muß. Damit ist auch $-1-2i$ ein Eigenwert.
Der Summand t zeigt, dass 0 ein doppelter Eigenwert sein muss.

$$\lambda_1 = -1+2i\ , \quad \lambda_2 = -1-2i\ , \quad \lambda_3 = \lambda_4 = 0\ .$$

Es gibt mindestens 4 Eigenwerte. Daraus folgt, daß die kleinste Ordnung 4 ist.
Aus dem charakteristischen Polynom schließt man:

$$P(\lambda) = (\lambda+1-2i)(\lambda+1+2i)\lambda^2 = \left((\lambda+1)^2+4\right)\lambda^2 = \left(\lambda^2+2\lambda+5\right)\lambda^2 = \lambda^4+2\lambda^3+5\lambda^2\ .$$

Daher lautet die DGl:

$$y^{(4)} + 2y''' + 5y'' = 0\ .$$

b) $e^{-t}\sin(2t)$, $e^{-t}\cos(2t)$, 1, t.

5. Aufgabe

6 Punkte

$$y(x) = (x-2)^5 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} y'(x) = 5(x-2)^4 &= 5y^{\frac{4}{5}} \\ y(2) &= 0 \end{aligned}$$

ist Lösung des AWPs.

Ebenso

$$y(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} y'(x) = 0 &= 5y^{\frac{4}{5}} \\ y(2) &= 0 \end{aligned}$$

ist ebenfalls Lösung des AWPs.

Dies widerspricht nicht dem EES, da die rechte Seite der DGL $5y^{\frac{4}{5}}$ bei $y=0$ nicht differenzierbar ist. Die Voraussetzungen des EES sind also nicht erfüllt.

6. Aufgabe

7 Punkte

Laplace-Transformation und Faltungssatz liefern:

$$\mathcal{L}[\int_0^t f(t-\tau)f(\tau)d\tau](s) = \mathcal{L}[4te^t](s)$$

$$\int_0^t f(t-\tau)f(\tau)d\tau = f * f$$

$$\mathcal{L}[f * f](s) = (\mathcal{L}[f](s))^2$$

$$\mathcal{L}[4te^t] = 4\mathcal{L}[t](s-1) = \frac{4}{(s-1)^2}$$

$$(\mathcal{L}[f](s))^2 = \frac{4}{(s-1)^2}$$

$$\mathcal{L}[f](s) = \frac{2}{s-1}$$

$$f(t) = 2e^t$$

7. Aufgabe

7 Punkte

a) Ansatz $u(x,t) = X(x)T(t)$ in $u_x + (x-t)u_t = 0$ liefert:

$$X'(x)T(t) + (x-t)X(x)\dot{T}(t) = 0$$

Die Gleichung läßt sich nicht nach x und t separieren.

b) Ansatz $u(x,t) = X(x)T(t)$ in $u_{xx} + 3u_{xt} + u_t = 0$ liefert:

$$X''(x)T(t) + 3X'(x)\dot{T}(t) + X(x)\dot{T}(t) = 0$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + 3\frac{X'(x)\dot{T}(t)}{X(x)T(t)} + \frac{\dot{T}(t)}{T(t)} = 0 \quad (X(x)T(t) \neq 0)$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{\dot{T}(t)}{T(t)}\left(3\frac{X'(x)}{X(x)} + 1\right) = 0$$

$$\frac{\frac{X''(x)}{X(x)}}{3\frac{X'(x)}{X(x)} + 1} = -\frac{\dot{T}(t)}{T(t)} = \lambda \in \mathbb{R}$$

Man erhält die 2 gewöhnlichen DGL:

$$\dot{T}(t) = -\lambda T(t)$$

$$X''(x) = \lambda X(x)\left(3\frac{X'(x)}{X(x)} + 1\right) = 3\lambda X'(x) + \lambda X(x)$$