Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik SS 2011
Dozentin: Dr. G. Penn-Karras
Assistentin: Dr. C. Papenfuss 14. Oktober 2011

Oktober-Klausur
Integraltransformationen und partielle Differentialgleichungen für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Es ist ein handbeschriebenes A4 Blatt mit Notizen zugelassen. Taschenrechner und Formelsammlungen sind nicht zugelassen. Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Gesamtklausur ist mit **30** von **60** Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens **10** von **30** Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	Σ

4	5	6	Σ

Rechenteil

1. Aufgabe

8 Punkte

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des DGl-Systems

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} .$$

2. Aufgabe

11 Punkte

Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems mit der Methode der Laplace-Transformation:

$$y''' - 2y'' - 3y' = 14\,\delta(t) , \quad y(0) = 0 , \quad y'(0) = 0 , \quad y''(0) = -2 .$$

$\delta(t)$ bezeichnet die in 0 zentrierte Dirac-Funktion.

3. Aufgabe

11 Punkte

a) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gestalt $X(x)T(t)$ der partiellen Differentialgleichung

$$u_{tt}(x,t) = x u_x(x,t) , \quad x \geq 1 ,$$

die periodisch in t sind.

b) Welche der Lösungen aus a) erfüllen zusätzlich die Bedingungen

$$u(x,0) = 0 = u(x,\pi) , x \geq 1 \ ?$$

c) Lösen Sie das Rand-Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u_{tt}(x,t) &= x u_x(x,t) , \quad x \geq 1 , \\ u(x,0) &= 0 = u(x,\pi) , \\ u(1,t) &= \sin t + 3\sin(3t) . \end{aligned}$$

Verständnisteil

4. Aufgabe — 11 Punkte

Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\dot{\vec{y}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{t} \\ \frac{2}{t} & -\frac{1}{t} \end{pmatrix} \vec{y} + \begin{pmatrix} t \\ 5t \end{pmatrix} \quad , \qquad t > 0 \ .$$

a) Zeigen Sie, dass

$$\vec{y}_1(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{t^2} \\ -\frac{2}{t^2} \end{pmatrix} \ , \ \vec{y}_2(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$$

ein Fundamentalsystem des zugehörigen homogenen DGl-Systems ist.

b) Existiert eine eindeutige Lösung des inhomogenen DGl-Systems? Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Zeigen Sie, dass

$$\vec{y}_p(t) = \begin{pmatrix} 2t^2 \\ 3t^2 \end{pmatrix}$$

eine Lösung des DGl-Systems ist und geben Sie die allgemeine Lösung an.

5. Aufgabe — 10 Punkte

Finden Sie eine Funktion $y \ : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ als Lösung der Integralgleichung

$$\int_0^t \sin(t-\tau) y(\tau) d\tau = t \sin(t) \ .$$

6. Aufgabe — 9 Punkte

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind:

a) Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$t^{2n} = t^n * t^n \ .$$

b) $\mathcal{L}[f'](s) = \left(\mathcal{L}[f]\right)'(s) \ .$

c) Für Funktionen $f, g, h : [0, \infty[\to \mathbb{C}$ gilt

$$f * (g+h) = f * g + f * h \ .$$

Begründen Sie Ihre Antworten. Antworten ohne Begründung geben keine Punkte.