Technische Universität Berlin
Fakultät II
Institut für Mathematik
Dozentin Dr. G. Penn-Karras
Assistentin Dr. C. Papenfuß

SS 2011

Integraltransformationen und partielle Differentialgleichungen für Ingenieure
Lösung Klausur Oktober

Rechenteil

Aufgabe 1:
Bestimmen der Eigenwerte der Koeffizientenmatrix:

$$\det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & -2 & 1 \\ 0 & -1-\lambda & -1 \\ 0 & 4 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)\left((-1-\lambda)(3-\lambda)+4\right)$$
$$= (2-\lambda)\left(\lambda^2-2\lambda+1\right) \ .$$

mit den Lösungen

$$\lambda_1 = 2 \ , \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 1 \ .$$

Zu $\lambda_1 = 2$ findet man den Eigenvektor $\vec{v_1}$

$$(A-\lambda_1 I)\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \vec{v}_1 = \vec{0}$$
$$\Rightarrow \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zu $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ findet man einen Eigenvektor

$$(A-\lambda_2 I)\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \vec{v}_2 = \vec{0}$$
$$\Rightarrow \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Da die algebraische Vielfachheit 2 und die geometrische Vielfachheit 1 ist, benötigt man einen Hauptvektor $\vec{w}$ aus

$$(A-\lambda_2 I)\vec{w} = \vec{v}_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \vec{w} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} -3 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Damit lautet die allgemeine Lösung

$$\vec{y}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} \vec{v}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} \vec{v}_2 + C_3 e^{\lambda_2 t} \left(\vec{w} + t \vec{v}_2 \right)$$

$$= C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^t \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_3 e^t \left(\begin{pmatrix} -3 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

Aufgabe 2:
Laplace-Trafo der DGl und Einsetzen der Anfangsbedingungen liefert:

$$\begin{aligned} s^3 Y(s) - s^2 y(0) - s\dot{y}(0) - \ddot{y}(0) - 2\left(s^2 Y(s) - s y(0) - \dot{y}(0)\right) - 3\left(sY(s) - y(0)\right) \\ = 14 \\ s^3 Y(s) + 2 - 2s^2 Y(s) - 3sY(s) = 14 \\ Y(s)\left(s^3 - 2s^2 - 3s\right) = Y(s)s\left(s^2 - 2s - 3\right) = 12 \\ Y(s) = \frac{12}{s\left(s^2 - 2s - 3\right)} \end{aligned}$$

Die Nullstellen des Nenners sind: $s_1 = 0$, $s^2 - 2s - 3 \Rightarrow s_2 = 3$, $s_3 = -1$.
Partialbruchzerlegung:

$$\frac{12}{s(s-3)(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-3} + \frac{C}{s+1}$$

$$s = 0: \quad 12 = -3A \quad \Leftrightarrow \quad A = -\frac{12}{3} = -4$$

$$s = 3: \quad 12 = B \cdot 3 \cdot 4 \quad \Leftrightarrow \quad B = \frac{12}{12} = 1$$

$$s = -1: \quad 12 = C \cdot (-1) \cdot (-1-3) \quad \Leftrightarrow \quad C = \frac{12}{4} = 3$$

$$Y(s) = \frac{12}{s(s-3)(s+1)} = -\frac{4}{s} + \frac{1}{s-3} + \frac{3}{s+1}$$

Laplace-Rücktrafo liefert die gesuchte Lösung:

$$y(t) = -4 + e^{3t} + 3e^{-t} \; .$$

Aufgabe 3:

a) Einsetzen des Ansatzes $u(x,t) = X(x)T(t)$ in die partielle DGL liefert

$$\begin{aligned} X(x)\ddot{T}(t) &= xX'(x)T(t) \\ \Leftrightarrow \quad \frac{xX'(x)}{X(x)} &= \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Die DGl für $T(t)$ hat periodische Lösungen nur falls $\lambda \leq 0$.
Fall 1: $\lambda = 0$

$$\begin{aligned} T(t) &= C_0 + C_1 t \\ X(x) &= C_2 \\ u(x,t) = (C_0 + C_1 t)C_2 &= C + Dt \ . \end{aligned}$$

Fall 2: $\lambda < 0$

$$T(t) = C_3 \cos\left(\sqrt{-\lambda}t\right) + C_4 \sin\left(\sqrt{-\lambda}t\right) \ .$$

Die DGL für $X(x)$ wird integriert:

$$\begin{aligned} \frac{X'(x)}{X(x)} &= \frac{\lambda}{x} \\ \Rightarrow \quad \ln X(x) &= \lambda \ln x + C_5 \\ X(x) &= C_6 x^{\lambda} \\ u(x,t) = x^{\lambda}\left(C_7 \cos\left(\sqrt{-\lambda}t\right) + C_8 \sin\left(\sqrt{-\lambda}t\right)\right) \end{aligned}$$

b) Fall 1: $\lambda = 0$

$$\begin{aligned} u(x,0) &= C + 0 \cdot D = C = 0 \\ u(x,\pi) &= D\pi = 0 \quad \Rightarrow \quad D = 0 \end{aligned}$$

und es bleibt nur die triviale Lösung $u(x,t) = 0$
Fall 2: $\lambda < 0$

$$\begin{aligned} u(x,0) = x^{\lambda}\left(C_7 \cos 0 + C_8 \sin 0\right) = x^{\lambda} C_7 = 0 \quad &\Rightarrow \quad C_7 = 0 \\ u(x,\pi) &= x^{\lambda} C_8 \sin\left(\sqrt{-\lambda}\pi\right) \end{aligned}$$

Nichttriviale Lösungen findet man nur für $C_8 \neq 0$, d.h. $\sqrt{-\lambda}\pi = n\pi \ , \ n \in \mathbb{N}$, $\lambda = -n^2$:

$$u_n(x,t) = C_n x^{-n^2} \sin(nt) \ , \ n \in \mathbb{N} \ .$$

und durch Superposition

$$u(x,t) = \sum_n C_n x^{-n^2} \sin(nt) \ .$$

c) Auswerten der Randbedingung:

$$u(1,t) = \sum_n C_n 1^{-n^2} \sin(nt) = \sin t + 3\sin(3t) \quad \Rightarrow C_1 = 1 \ , \ C_3 = 3$$

Damit ist die Lösung des Randanfangswertproblems

$$u(x,t) = \frac{1}{x}\sin t + \frac{3}{x^9}\sin(3t) \ .$$

Verständnisteil

Aufgabe 4:

a)
- $\vec{y}_1$ und $\vec{y}_2$ sind Lösungen:

$$\dot{\vec{y}}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{t^3} \\ \frac{4}{t^3} \end{pmatrix}$$

$$A\vec{y}_1 = \frac{1}{t}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{t^2} \\ -\frac{2}{t^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{t^3} \\ \frac{4}{t^3} \end{pmatrix},$$

$$\dot{\vec{y}}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A\vec{y}_2 = \frac{1}{t}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

- $\vec{y}_1$ und $\vec{y}_2$ sind linear unabhängig, denn

$$W(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{t^2} & t \\ -\frac{2}{t^2} & t \end{pmatrix}$$

$$\det W(t) = \frac{1}{t^2}t + \frac{2}{t^2}t = \frac{3}{t} \neq 0 \quad \text{für alle } t > 0$$

b) Die DGL hat unendlich viele Lösungen. Die Lösung kann nicht eindeutig sein, solange keine Anfangswerte vorgegeben sind.

c)

$$\dot{\vec{y}}_p = 2t\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$A\vec{y}_p + \vec{b} = \frac{1}{t}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2t^2 \\ 3t^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ 5t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4t \\ 6t \end{pmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung hat die Form

$$\vec{y}(t) = C_1\vec{y}_1(t) + C_2\vec{y}_2(t) + \vec{y}_p(t)$$
$$= C_1\begin{pmatrix} \frac{1}{t^2} \\ -\frac{2}{t^2} \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2t^2 \\ 3t^2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5:

Anwenden der Laplace-Transformation und Faltungssatz liefert:

$$\mathcal{L}[\int_0^t \sin(t-\tau)y(\tau)d\tau](s) = \mathcal{L}[\sin t * y(t)](s) = \mathcal{L}[\sin t](s)Y(s) =$$
$$\mathcal{L}[t\sin(t)](s) = \mathcal{L}[\sin t]'(s)$$
$$\frac{1}{1+s^2}Y(s) = \frac{2s}{(s^2+1)^2}$$
$$Y(s) = \frac{2s}{s^2+1}$$

Laplace-Rücktransformation liefert die gesuchte Lösung

$$y(t) = 2\cos t \ .$$

Aufgabe 6:

(a) a) Falsch.
Wende die Laplace-Transformation auf die Gleichung an;

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[t^{2n}](s) = \mathcal{L}[t^n * t^n](s) &= \mathcal{L}[t^n](s)L[t^n](s)\\ \frac{(2n)!}{s^{2n+1}} &= \frac{(n)!}{s^{n+1}}\frac{(n)!}{s^{n+1}}\end{aligned}$$

Widerspruch!

b) Falsch.
Gegenbeispiele:

- $f(t) = e^t$, $f'(t) = e^t$

$$\mathcal{L}[e^t](s) = \frac{1}{s-1} \neq \mathcal{L}[e^t]'(s) = -\frac{1}{(s-1)^2} \ .$$

- $f(t) = t$, $f'(t) = 1$

$$\mathcal{L}[f'](s) = \frac{1}{s} \neq \mathcal{L}[f(t)]'(s) = \mathcal{L}[t]'(s) = \left(\frac{1}{s^2}\right)' = -\frac{2}{s^3} \ .$$

c) Wahr.
Mit der Laplace-Transformation:

$$L[f*(g+h)](s) = L[f](s)L[g+h](s) = L[f](s)L[g](s) + L[f](s)L[h](s) = L[f*g](s) + L[f*h](s)$$

und dem Satz von Lerch.

(Oder mit der Definition der Faltung)