Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik WS 2011/2012

Dozent: Prof. D. Hömberg

Assistentin: Dr. C. Papenfuss 20. Februar 2012

Februar-Klausur
Integraltransformationen und partielle Differentialgleichungen für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Es ist ein handbeschriebenes A4 Blatt mit Notizen, sowie die Laplace-Tabelle zugelassen. Taschenrechner und Formelsammlungen sind nicht zugelassen. Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Gesamtklausur ist mit **30** von **60** Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens **10** von **30** Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	Σ

4	5	6	7	Σ

Rechenteil

1. Aufgabe 8 Punkte

Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \vec{x} \ , \quad \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

2. Aufgabe 10 Punkte

Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems mit der Methode der Laplace-Transformation:

$$y'' + y' - 2y = \delta_3(t) \ , \quad y(0) = 0 \ , \quad y'(0) = 1 \ .$$

$\delta_3(t)$ bezeichnet die in 3 zentrierte Dirac-Funktion.

3. Aufgabe 12 Punkte

a) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gestalt $X(x)T(t)$ der partiellen Differentialgleichung

$$u_{xx}(x,t) = t^2 u_t(x,t) \ , \quad t \geq 1 \ ,$$

die periodisch in x sind.

b) Welche der Lösungen aus a) erfüllen zusätzlich die Bedingungen

$$u(0,t) = 0 = u(2\pi, t) \ , t \geq 1 \ ?$$

c) Lösen Sie das Rand-Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u_{xx}(x,t) &= t^2 u_t(x,t) \ , \quad t \geq 1 \ , \\ u(0,t) &= 0 = u(2\pi, t) \ , t \geq 1 \\ u(x,1) &= \sin(2x) + 2\sin(4x) \ . \end{aligned}$$

Verständnisteil

4. Aufgabe 5 Punkte

Berechnen Sie die Fourier-Transformierte

$$\mathcal{F}\left[\frac{2}{16t^2 + 8t + 2}\right](\omega) \ .$$

Hierzu können Sie die Beziehung

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{1+t^2}\right](\omega) = \pi \exp(-|\omega|)$$

benutzen.

5. Aufgabe

7 Punkte

Finden Sie eine Funktion $f \ : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ als Lösung der Integralgleichung

$$\int_0^t f(t-\tau)f(\tau)d\tau = \frac{t^3}{6}e^t \ .$$

6. Aufgabe

8 Punkte

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind und geben Sie jeweils eine kurze Begründung an.

a) Alle Lösungen der Wellengleichung $u_{tt} - c^2 u_{xx}$ sind von der d'Alembert Form $u(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)$ mit zweimal stetig differenzierbaren Funktionen $f, g \ : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

b) Es gibt eine lineare homogene Differentialgleichung 3.Ordnung mit konstanten Koeffizienten, die $te^t \sin t$ als Lösung hat.

c) Das Anfangswertproblem

$$y' = \cos(x^2 y^2) \ , \quad y(0) = 0$$

hat genau eine Lösung.

d) Das Anfangswertproblem

$$y' = \ln(y-2) \ , \quad y(1) = 1$$

hat genau eine Lösung.

7. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben sei die Differentialgleichung mit Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$x'' + 2x' + \alpha x = 0 \ .$$

a) Aus welchem Intervall muss α sein, damit die Lösung eine gedämpfte Schwingung wird? Geben Sie die allgemeine reelle Lösung der Differentialgleichung in dem Fall an.

b) Aus welchem Intervall muss α sein, damit die Lösung für große t unbeschränkt wächst? Geben Sie die allgemeine reelle Lösung der Differentialgleichung in dem Fall an.