Technische Universität Berlin
Fakultät II
Institut für Mathematik
Dozent Prof. D. Hömberg
Assistentin Dr. C. Papenfuß

WS 2011

Integraltransformationen und partielle Differentialgleichungen für Ingenieure
Lösung Klausur April

Rechenteil

1. Aufgabe

8 Punkte

Als Eigenwerte der Koeffizientenmatrix findet nan:

$$\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)\left((2-\lambda)^2-1\right) = (3-\lambda)\left(\lambda^2-4\lambda+3\right)$$

$$\lambda_1 = 3\ , \quad \lambda_{2,3} = 2 \pm 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda_2 = 1\ , \lambda_3 = 3$$

Zum doppelten Eigenwert $\lambda = 3$ findet man zwei linear unabhängige Eigenvektoren $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$.

$$(A-\lambda_1 I)\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\vec{v} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Zu $\lambda = 1$ findet den Eigenvektor $\vec{v_3}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\vec{v_3} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Damit lautet die allgemeine Lösung des DGl-Systems:

$$\begin{aligned}\vec{x}(t) &= C_1 e^{\lambda_1 t}\vec{v_1} + C_2 e^{\lambda_2 t}\vec{v_2} + C_3 e^{\lambda_3 t}\vec{v_3} \\ &= C_1 e^{3t}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + C_2 e^{3t}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + C_3 e^{t}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Auswerten der Anfangsbedingung:

$$\vec{x}(0) = \begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + C_3\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

mit der Lösung

$$\begin{aligned}C_1 &= 1\\ C_2 &= -2\\ C_3 &= -1\ .\end{aligned}$$

Die Lösung des Anfangswertproblems lautet:

$$\vec{x}(t) = e^{3t}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - 2e^{3t}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} - e^{t}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

2. Aufgabe

10 Punkte

Laplace-Transformation der DGl ergibt (mit $\mathcal{L}\left[y(t)\right](s) =: Y(s)$)

$$
\begin{aligned}
y'' - y' - 2y = \delta_1(t) \ , \quad y(0) = 3 \ , \quad y'(0) = 0 \\
s^2Y - sY - 2Y - 3s + 3 = e^{-s} \\
Y(s^2 - s - 2) = e^{-s} + 3s - 3 \\
Y(s) = \frac{e^{-s}}{s^2 - s - 2} + \frac{3s - 3}{s^2 - s - 2}
\end{aligned}
$$

Die Nullstellen des Nenners sind 2 und -1.
Partialbruchzerlegung:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(s-2)(s+1)} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+1} = \frac{B(s-2) + A(s+1)}{(s-2)(s+1)} \\
\Rightarrow \quad 1 = B(s-2) + A(s+1) \\
\Rightarrow \quad 1 = 3A \quad \Leftrightarrow \quad A = \frac{1}{3} \\
\Rightarrow \quad 1 = B(-3) \quad \Rightarrow \quad B = -\frac{1}{3} \\
\frac{1}{(s-2)(s+1)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{s-2} - \frac{1}{s+1}\right)
\end{aligned}
$$

und Partialbruchzerlegung des restlichen Terms:

$$
\frac{3s}{s^2 - s - 2} = \frac{2}{s-2} + \frac{1}{s+1}
$$

Damit

$$
\begin{aligned}
Y(s) &= e^{-s}\left(\frac{1}{3}\frac{1}{s-2} - \frac{1}{3}\frac{1}{s+1}\right) + \frac{2}{s-2} + \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s-2} + \frac{1}{s+1} \\
&= e^{-s}\left(\frac{1}{3}\frac{1}{s-2} - \frac{1}{3}\frac{1}{s+1}\right) + \frac{1}{s-2} + \frac{2}{s+1} \\
&.
\end{aligned}
$$

Rücktransformation ergibt die gesuchte Lösung

$$
y(t) = u_1(t)\frac{1}{3}\left(e^{2(t-1)} - e^{-(t-1)}\right) + e^{2t} + 2e^{-t}
$$

3. Aufgabe

12 Punkte

a) Einsetzen des Ansatzes $u(x,y) = X(x)Y(y)$ in die partielle DGL liefert

$$\begin{aligned} X''(x)Y(y) &= -X(x)Y''(y) \\ \Leftrightarrow \quad \frac{X''(x)}{X(x)} &= -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Die DGl für $X(x)$ hat periodische Lösungen nur falls $\lambda \leq 0$.
Fall 1: $\lambda = 0$

$$X(x) = C_0 + C_1 x$$

Periodisch nur für $C_1 = 0$

$$X(x) = C_0 \ .$$

Analog

$$Y(y) = C_2 + C_3 y \ .$$

$$u(x,y) = \bar{C}_2 + \bar{C}_3 y \ .$$

Fall 2: $\lambda < 0$:
Die DGl für $X(x)$ liefert:

$$X(x) = C_5 \cos\left(\sqrt{-\lambda} x\right) + C_6 \sin\left(\sqrt{-\lambda} x\right) \ .$$

und die DGL für $Y(y)$:

$$Y(y) = C_7 e^{\sqrt{-\lambda} y} + C_8 e^{-\sqrt{-\lambda} y} \ .$$

Die Lösung der DGl in diesem Fall ist

$$u(x,y) = \left(C_5 \cos\left(\sqrt{-\lambda} x\right) + C_6 \sin\left(\sqrt{-\lambda} x\right)\right)\left(C_7 e^{\sqrt{-\lambda} y} + C_8 e^{-\sqrt{-\lambda} y}\right)$$

b) Auswerten der Randbedingung $u(0,y) = 0 = u(\pi, y) \quad \Rightarrow \quad X(0) = 0 = X(\pi)$:
Fall 1: $\lambda = 0$

$$X(0) = C_0 = 0$$

und es bleibt nur die triviale Lösung $u(x,y) = 0$
Fall 2: $\lambda < 0$

$$X(0) = C_5 \cos\left(\sqrt{-\lambda}0\right) + C_6 \sin\left(\sqrt{-\lambda}0\right) = C_5 = 0\ .$$
$$X(\pi) = C_6 \sin\left(\sqrt{-\lambda}\pi\right) = 0$$

Nichttriviale Lösungen findet man nur für $C_6 \neq 0$, d.h. $\sqrt{-\lambda}\pi = n\pi\ ,\ n \in \mathbb{N}$, $\lambda = -n^2$:

$$u(x,y) = C_6 \sin(nx)\left(C_7 e^{ny} + C_8 e^{-ny}\right)$$

und durch Superposition

$$u(x,y) = \sum_n \sin(nx)\left(C_{7n} e^{ny} + C_{8n} e^{-ny}\right)\ .$$

c) Auswerten der Randbedingungen für $Y(y)$:

$$u(x,0) = 0 \quad \Rightarrow \quad Y(0) = 0 = C_7 + C_8 \quad \Leftrightarrow \quad C_8 = -C_7$$

$$u(x,2) = 6\sin(4x) = \sum_n \sin(nx)\, C_{7n}\left(e^{2n} - e^{-2n}\right) = \sum_n \sin(nx)\, C_{7n} 2\sinh(2n)$$
$$\Rightarrow C_{74} 2\sinh 8 = 6\ ,$$
$$\Rightarrow C_{74} = \frac{3}{\sinh 8}\ ,\quad C_n = 0 \quad \text{für} \quad n \neq 4$$

Damit ist die Lösung des Randanfangswertproblems

$$u(x,y) = \frac{3}{\sinh 8}\sin(4x)\left(e^{4y} - e^{-4y}\right) = \frac{3}{\sinh 8}\sin(4x)\, 2\sinh(4y)\ .$$

Verständnisteil

4. Aufgabe

13 Punkte

(a)

$$3u_x - 2u_y = 0 \ ,$$

Ansatz $u(x,y) = X(x)Y(y)$ einsetzen in die DGl liefert für $X(x)Y(y) \neq 0$

$$3X'Y - 2Y'X = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{X'}{X} = \frac{2}{3}\frac{Y'}{Y} = \lambda \in \mathbb{R}$$

Lösungen der gewöhnlichen DGl's:

$$X(x) = C_1 e^{\lambda x}$$
$$Y(y) = C_2 e^{\lambda \frac{3}{2} y}$$

(b)

$$y^2 u_x + x^2 u_y = 0 \ ,$$

Ansatz $u(x,y) = X(x)Y(y)$ einsetzen in die DGl liefert für $x^2y^2X(x)Y(y) \neq 0$

$$y^2X'Y + x^2Y'X = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{X'}{x^2X} = -\frac{Y'}{y^2Y} = \lambda \in \mathbb{R} \ .$$

Zu lösen sind die gewöhnlichen DGl's

$$X' = x^2X\lambda \quad \Leftrightarrow \quad \frac{X'}{X} = \lambda x^2$$
$$Y' = -y^2Y\lambda \quad \Leftrightarrow \quad \frac{Y'}{Y} = -\lambda y^2$$

$$\ln(|X|) = \frac{\lambda}{3}x^3 + c_1$$
$$\ln(|Y|) = -\frac{\lambda}{3}y^3 + c_2$$

Lösungen der gewöhnlichen DGl's:

$$X(x) = C_1 e^{\frac{\lambda}{3}x^3}$$
$$Y(y) = C_2 e^{-\frac{\lambda}{3}y^3}$$

(c)

$$u_{tt} + u_{xxxx} = 0$$

Ansatz $u(x,t) = X(x)T(t)$ einsetzen in die DGl liefert für $X(x)T(t) \neq 0$

$$XT'' + X''''T = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{X''''}{X} = -\frac{T''}{T} = \lambda \in \mathbb{R} \; .$$

Zu lösen sind die gewöhnlichen DGl's

$$X'''' = \lambda X$$
$$T'' = -\lambda T$$

mit den allgemeinen Lösungen

$$X = C_1 e^{\sqrt[4]{\lambda} x} + C_2 e^{-\sqrt[4]{\lambda} x} + C_3 e^{i\sqrt[4]{\lambda} x} + C_4 e^{-i\sqrt[4]{\lambda} x}$$
$$T(t) = C_5 e^{\sqrt{-\lambda} t} + C_6 e^{-\sqrt{-\lambda} t}$$

Für eine Fallunterscheidung gibt es einen Zusatzpunkt

5. Aufgabe

9 Punkte

(a)

$$y'' + y' - 6y = t^2 e^{-2t} + t\sin(3t)$$

Erstansatz:

$$y_p(t) = (At^2 + Bt + C)e^{-2t} + (Dt + E)(\sin(3t) + F\cos(3t))$$

Die charakteristische Gleichung der DGl lautet

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$$

mit den Lösungen

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{5}{2} \; , \quad \lambda_1 = 2 \; , \quad \lambda_2 = -3$$

Keine Resonanz $\quad \Rightarrow$

$$y_p(t) = (At^2 + Bt + C)e^{-2t} + (Dt + E)(\sin(3t) + F\cos(3t))$$

(b)

$$y'' + 2y' + 5y = \cos(2t)$$

Erstansatz:

$$y_p(t) = A\cos(2t) + B\sin(2t)$$

Die charakteristische Gleichung der DGl lautet

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$$

mit den Lösungen

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm 2i$$

Keine Resonanz

$$y_p(t) = A\cos(2t) + B\sin(2t)$$

(c)

$$y'' - 2y' + y = e^t$$

Erstansatz:

$$y_p(t) = Ae^t$$

Die charakteristische Gleichung der DGl lautet

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

mit den Lösungen

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$$

Resonanz mit doppelter Nullstelle

$$y_p(t) = At^2e^t$$

6. Aufgabe

8 Punkte

a) wahr
Zu $y_1(t) = t$ gehört als Nullstelle des charakteristischen Polynoms $\lambda = 0$. Der Faktor t zeigt, dass die Nullstelle doppelt ist. Zur doppelten Nullstelle $\lambda = 0$ gehört als weitere Fundamentallösung $y_2(t) = 1$.

b) wahr

Mit den Voraussetzungen f reellwertig und gerade Funktion gilt:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f(t)](\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left(\cos(\omega t) - i\sin(\omega t)\right)dt \\ = 2\int_{0}^{\infty} f(t)\cos(\omega t)dt\end{aligned}$$

ist reellwertig und eine gerade Funktion von ω.

c) wahr
Die Voraussetzungen des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes sind erfüllt: Die rechte Seite $\ln(y^2)$ ist in einer Umgebung von $(0, 1)$ stetig differenzierbar.

d) falsch
Wende die Laplace-Transformation auf die Gleichung an;

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[t^{2n}](s) = \mathcal{L}[t^n * t^n](s) = \mathcal{L}[t^n](s)L[t^n](s) \\ \frac{(2n)!}{s^{2n+1}} = \frac{(n)!}{s^{n+1}}\frac{(n)!}{s^{n+1}}\end{aligned}$$

Widerspruch!