Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik SS 12

Dr. H.-J. Flad 20. Juli 2012

Juli – Klausur
Integraltransformationen und partielle Differentialgleichungen für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen ist nur die ausgegebene oder von der ISIS-Seite heruntergeladene Laplacetabelle zugelassen. Taschenrechner und Formelsammlungen sind nicht zugelassen. Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Geben Sie im Rechenteil immer den **vollständigen Rechenweg** und im Verständnisteil, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **120 Minuten**.

Die Gesamtklausur ist mit 30 von 60 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 10 Punkte erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	Σ_R	4	5	6	Σ_V	Σ

Rechenteil

1. Aufgabe

11 Punkte

Berechnen Sie im $\mathbb{R}^3$ die Lösung $\vec{y}$ des Anfangswertsproblems

$$\vec{y}\,'(t) = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ -8 & 4 & 2 \end{pmatrix} \vec{y}(t), \qquad \vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Bestimmen Sie einen Hauptvektor $\vec{h}$ anhand der Gleichung $(A - \lambda E)\vec{h} = \vec{v}$.

2. Aufgabe

9 Punkte

Ermitteln Sie mit Hilfe der Methode der Laplace-Transformation die Lösung für das Anfangswertsproblem

$$\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) - 2x(t) = \delta_3(t), \qquad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 3.$$

Dabei bezeichnet $\delta_3(t)$ die an der Stelle 3 konzentrierte Delta-Funktion.

3. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben ist die reelle partielle Differentialgleichung in $y(x,t)$

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{4}\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = 0.$$

a) Ermitteln Sie alle Lösungen $y(x,t)$ der Form $y(x,t) = X(x)T(t)$, die die Bedingung $y(0,t) = y(\pi,t) = 0$ erfüllen; dabei soll $X(x)$ periodisch und nicht-konstant sein.

b) Berechnen Sie durch Superposition der in Teil a) gefundenen Lösungen die Lösung y mit
$$y(x,0) = 3\sin 2x + 5\sin 4x.$$

Bitte 2. Blatt beachten!

Name: .... Matr.–Nr.: ....

Verständnisteil

4. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben ist im $\mathbb{R}^2$ das Anfangswertsproblem (AWP)

$$y' - \mathrm{e}^x y^2 = 0, \quad y(0) = 1.$$

a) Zeigen Sie, dass dieses AWP eindeutig lösbar ist.

b) Ermitteln Sie die Lösung zusammen mit ihrem maximalen Definitionsbereich.

5. Aufgabe

10 Punkte

Es werden zwei reelle Funktionen f und g definiert:

$$f(t) := \big(1 + |t|\big)\,\mathrm{e}^{-|t|}\,, \quad g(t) := \mathcal{F}[f](t).$$

Die beiden Teilaufgaben sind voneinander unabhängig lösbar und bringen jeweils die angegebenen Punkte.

a) (6 Punkte) Ermitteln Sie die Fourier-Transformierte $\mathcal{F}[f](t)$ (also den Ausdruck für $g(t)$).

b) (4 Punkte) Ermitteln Sie die Fourier-Transformierte $\mathcal{F}[g](t)$.

6. Aufgabe

10 Punkte

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind, und geben Sie dabei jeweils eine Begründung an.
(Jede richtige und vollständig begründete Antwort gibt 2 Punkte. Antworten ohne Begründung oder mit einer falschen Begründung bringen keine Punkte.)
Antworten Sie bitte *nur* auf Ihren Lösungsblättern!

a) Es gibt eine reelle lineare homogene DGL 4. Ordnung mit konstanten Koeffizienten, für die die Funktionen $x\cos x$ und $\sin x$ zwei Lösungen sind.

b) Es gibt eine nicht-konstante stetige Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von exponentieller Ordnung mit $f(t) = 0$ für $t \le 0$, so dass $f(t) * u_1(t) = f(t)$ gilt.
(„$*$“ steht für das Faltungsprodukt, „u_1“ für die Heaviside-Funktion mit Sprungstelle 1. Verwenden Sie den Faltungssatz der Laplacetransformation.)

c) Besitzt ein LTI-System die Übertragungsfunktion $\frac{1}{s}$, so hat es die Impulsantwort e^{-t}.

d) Die Funktion $\mathrm{e}^{-t^2/2}$ ist von endlicher Bandbreite.

e) Für $k \in \{0, 1, 2\}$ gilt: Das Legendre-Polynom P_k hat genau k Nullstellen.