Musterlösung — DGL f. Ing., 20. Juli 2012

1. Aufgabe

11 Punkte

Aus

$$\begin{vmatrix} -4-\lambda & 1 & 0 \\ -4 & -\lambda & 0 \\ -8 & 4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} \implies 0 &= (-4-\lambda)(-\lambda)(2-\lambda) - (2-\lambda)(-4) \\ &= (2-\lambda)\big((-4-\lambda)(-\lambda)+4\big) \\ &= (2-\lambda)\big(\lambda^2+4\lambda+4\big) \\ &= (2-\lambda)(\lambda+2)^2 \end{aligned}$$

ergeben sich der einfache Eigenwert 2 und der doppelte Eigenwert -2.

Der Eigenraum zum Eigenwert 2 ergibt sich als Raum der Lösungen $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ von

$$\begin{pmatrix} -6 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ -8 & 4 & 0 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Der eindimensionale Eigenraum lässt sich durch Hinschauen schnell finden:

$\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

Der Eigenraum zum Eigenwert -2 ergibt sich als Raum der Lösungen $v \in \mathbb{R}^3$ von

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -8 & 4 & 4 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

anhand der folgenden Gauß-Schritte

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -8 & 4 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

zum ebenfalls nur eindimensionalen Eigenraum $\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$.

Folglich ist ein weiterer, linear unabhängiger Hauptvektor h zum Eigenwert 0 zu suchen:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -8 & 4 & 4 \end{pmatrix} \vec{h} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Man findet als eine inhomogene Lösung (2. und 3. Spalte anschauen):

$$\vec{h} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Allgemein:

$$\vec{h} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{C}$$

Die gesuchte Lösung schreibt sich wie folgt:

$$\vec{y}(t) = C_1 \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \mathrm{e}^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \mathrm{e}^{-2t} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

mit Konstanten C_1, C_2, C_3 mit

$$\vec{y}(0) = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Es folgt $C_1 = C_2 = 0$, $C_3 = 1$, somit ist mit

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

die gewünschte Lösung des AWPs gegeben.

2. Aufgabe

9 Punkte

Mit $X(s) := \mathcal{L}[x](s)$ ergibt sich im Laplace-Bereich

$$\begin{aligned} s^2X - 3 + sX - 2X &= \mathrm{e}^{-3s} \\ (s^2 + s - 2)X &= 3 + \mathrm{e}^{-3s} \\ X &= \frac{3}{s^2+s-2} + \frac{\mathrm{e}^{-3s}}{s^2+s-2} \end{aligned}$$

Es ist

$$s^2 + s - 2 = (s-1)(s+2),$$

damit Partialbruchzerlegung (mit Zuhaltemethode):

$$\frac{1}{(s-1)(s+2)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{s-1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{s+2}$$

Rücktransformation:

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-3s}\left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+2}\right) + \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+2} \\ &= \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-3s}\mathcal{L}\left[\mathrm{e}^{t} - \mathrm{e}^{-2t}\right](s) + \mathcal{L}\left[\mathrm{e}^{t} - \mathrm{e}^{-2t}\right](s) \\ x(t) &= \frac{1}{3}u_3(t)\left(\mathrm{e}^{t-3} - \mathrm{e}^{-2(t-3)}\right) + \mathrm{e}^{t} - \mathrm{e}^{-2t} \end{aligned}$$

3. Aufgabe

10 Punkte

a) Mit $y(x,t) = X(x)T(t)$ hat man

$$X''(x)T(t) - \frac{1}{4}X(x)T'(t) = 0.$$

Für $y(x,t) \neq 0$ ist Division der DGL durch Produkt $X(x)T(t)$ und Separation statthaft:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} - \frac{1}{4}\frac{T'(t)}{T(t)} = 0 \implies \frac{X''(x)}{X(x)} =: \lambda = \frac{1}{4}\frac{T'(t)}{T(t)}$$

DGLn in X und T:

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0, \qquad T'(t) - 4\lambda T(t) = 0.$$

Nicht-konstante, in x periodische Lösungen kann es nur für $\lambda < 0$ geben.

Es ist dann für jedes $\lambda \in \mathbb{R}^-$

$$X(x) = c_1 \cos\sqrt{-\lambda}x + c_2 \sin\sqrt{-\lambda}x,$$
$$T(t) = c_4 \mathrm{e}^{4\lambda t}$$

Die Bedingung $y(0,t) = y(\pi,t) = 0$ bedeutet $X(0) = X(\pi) = 0$. Daraus folgt $c_1 = 0$ sowie $\sin\pi\sqrt{-\lambda} = 0$. Damit ist λ eins der Werte λ_n mit

$$\sqrt{-\lambda_n} = n \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{N},\, n > 0$$
$$\lambda_n = -n^2$$

Die Funktionen y sind von der Form

$$A_n \mathrm{e}^{-4n^2 t} \sin nx, \quad A_n \in \mathbb{R}.$$

b) Mit der Superposition

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \mathrm{e}^{-4n^2 t} \sin nx$$

ist

$$y(x,0) = \sum_{n=1} A_n \sin nx = 3\sin 2x + 5\sin 4x$$
$$\implies A_2 = 3,\ A_4 = 5,\ A_k = 0 \text{ für } k = 1,3 \text{ oder } k \geq 5.$$

Damit lautet die gesuchte Lösung

$$y(x,y) = 3\mathrm{e}^{-16t}\sin 2x + 5\mathrm{e}^{-64t}\sin 4x.$$

4. Aufgabe

10 Punkte

a) Es ist

$$y' = \mathrm{e}^x y^2.$$

Für $x, y \in \mathbb{R}$ ist die rechte Seite stetig nach x und y differenzierbar, damit existiert nach dem EES ein Intervall um die Anfangsstelle 0, in dem es genau eine Lösung des AWPs gibt.

b) Mit TdV ergibt sich

$$\begin{aligned} y'y^{-2} &= \mathrm{e}^x \\ -y^{-1} &= \mathrm{e}^x + C, \qquad C \in \mathbb{R} \\ y &= -\frac{1}{\mathrm{e}^x + C}, \qquad C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Aus $y(0) = 1$ folgt $C = -2$. Damit ist

$$y = -\frac{1}{\mathrm{e}^x - 2} = \frac{1}{2 - \mathrm{e}^x}.$$

Der maximale Definitionsbereich wird durch die Nullstelle des Nenners $2 - \mathrm{e}^x$ bestimmt:

$$2 - \mathrm{e}^x = 0 \implies \mathrm{e}^x = 2 \implies x = \ln 2.$$

Die Anfangsstelle 0 liegt im Intervall $]-\infty, \ln 2[$. Die Lösung des AWPs ist somit durch

$$y\colon\ ]-\infty, \ln 2[\to \mathbb{R}\,,\ x \mapsto \frac{1}{2 - \mathrm{e}^x}$$

gegeben.

5. Aufgabe

10 Punkte

a) Es ist

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}[(1+|t|)\mathrm{e}^{-|t|}](\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} (1+|t|)\mathrm{e}^{-|t|}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t \\
&= 2\int_{0}^{\infty} (1+t)\mathrm{e}^{-t}\cos\omega t\,\mathrm{d}t \\
&= 2\,\mathrm{Re}\int_{0}^{\infty} (1+t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t \\
&= 2\,\mathrm{Re}\,\mathcal{L}[(1+t)\mathrm{e}^{-t}](-\mathrm{i}\omega) \\
&= 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{1}{-\mathrm{i}\omega+1}+\frac{1}{(-\mathrm{i}\omega+1)^2}\right) \\
&= 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{1+\mathrm{i}\omega}{1+\omega^2}+\frac{(1+\mathrm{i}\omega)^2}{(1+\omega^2)^2}\right) \\
&= 2\left(\frac{1}{1+\omega^2}+\frac{1-\omega^2}{(1+\omega^2)^2}\right) \\
&= 2\frac{(1+\omega^2)+(1-\omega^2)}{(1+\omega^2)^2} \\
&= \frac{4}{(1+\omega^2)^2}
\end{aligned}
$$

(Dieser Lösungsweg lässt sich natürlich abkürzen, wenn man die Formel

$$\mathcal{F}[f](\omega) = 2\,\mathrm{Re}\,\mathcal{L}[f](\mathrm{i}\omega)$$

für gerade Funktionen f benutzt.)

b) Man verwendet den Umkehrsatz:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}[g](t) &= \mathcal{F}\left[\mathcal{F}[f]\right](t) \\
&= 2\pi f(-t) \\
&= 2\pi(1+|-t|)\mathrm{e}^{-|-t|} \\
&= 2\pi(1+|t|)\mathrm{e}^{-|t|}
\end{aligned}
$$

Es ist demnach

$$\mathcal{F}[g](t) = 2\pi(1+|t|)\mathrm{e}^{-|t|}\ (= 2\pi f(t))$$

6. Aufgabe

10 Punkte

a) Wahr.
In Normalform handelt es sich um die DGL $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$. Die Zahlen i und $-\mathrm{i}$ müssen nämlich doppelte Nullstellen des charakteristischen Polynoms sein. Dieses Polynom ist gleich $(\lambda + \mathrm{i})^2(\lambda - \mathrm{i})^2$, also gleich $(\lambda^2 + 1)^2$.

b) Falsch.
Im Laplacebereich hat man $F(s)\frac{\mathrm{e}^{-s}}{s} = F(s)$, daraus folgt nur $F(s) = 0$, mit dem Satz von Lerch also $f(t) = 0$: f ist dann die Nullfunktion, welche aber konstant ist.

c) Falsch. Die Laplace-Transformierte der Impulsantwort eines LTI-Systems ist die Übertragungsfunktion des LTI-Systems. Mit $\mathcal{L}[\mathrm{e}^{-t}](s) = \frac{1}{s+1}$ passen hier aber Impulsantwort und Übertragungsfunktion nicht zusammen.

d) Falsch.
Die Fourier-Transformierte von $\mathrm{e}^{-t^2/2}$ ist proportional zu $\mathrm{e}^{-\omega^2/2}$, welche niemals verschwindet.

e) Wahr.
Mit $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$ und $P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$ haben P_0 keine Nullstelle, P_1 die einzige Nullstelle 0 und P_2 die beiden Nullstellen $\frac{1}{\sqrt{3}}$ und $-\frac{1}{\sqrt{3}}$.
Es gilt sogar: Für jede Zahl $k \in \mathbb{N}_0$ hat das Legendre-Polynom P_k genau k einfache Nullstellen.