Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik WS 12/13
Dr. G. Penn-Karras 01. März 2013

März – Klausur
Integraltransformationen und partielle Differentialgleichungen für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen ist nur die ausgegebene oder von der ISIS-Seite heruntergeladene Laplacetabelle zugelassen. Taschenrechner und Formelsammlungen sind nicht zugelassen. Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Gesamtklausur ist mit 30 von 60 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 10 von 30 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	Σ

4	5	6	7	Σ

<u>Rechenteil</u>

1. Aufgabe 13 Punkte

a) Finden Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\vec{y}\,' = \begin{pmatrix} 11 & 5 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \vec{y}.$$

b) Das Differentialgleichungssystem $\vec{x}\,' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \vec{x}$ besitzt das Fundamentalsystem (dies ist **nicht** zu prüfen!)

$$\left\{ e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\vec{z}\,' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \vec{z} + \begin{pmatrix} \dfrac{e^t}{1+t^2} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \qquad \vec{z}(0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

2. Aufgabe 10 Punkte

Berechnen Sie mittels der Laplacetransformation die Lösung $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ der Gleichung

$$\int_0^t \sinh(t-\tau)\big(e^\tau f'(\tau)\big)\mathrm{d}\tau = t^2$$

mit $f(0) = 0$.

3. Aufgabe 7 Punkte

Gegeben sei die Gleichung

$$y \cdot u = u_{xx} + u_y$$

im $\mathbb{R}^2$. Verwenden Sie den Produktansatz

$$u(x, y) = X(x)Y(y)$$

um gewöhnliche Differentialgleichungen für die Funktionen X und Y aufzustellen.
(Hinweis: Es ist nicht verlangt, diese DGLen zu lösen.)

Verständnisteil

4. Aufgabe

8 Punkte

Wir betrachten das Anfangswertproblem $y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x}$, $x > 0$, $y(1) = \frac{1}{3}$.

a) Besitzt das Problem eine eindeutige Lösung?

b) Bestimmen Sie ein $m \in \mathbb{N}$, so daß die Substitution $y(x) = x^m u(x)$ diese Gleichung in eine separable Gleichung überführt. Wie lautet die zugehörige Anfangsbedingung für u?

c) Lösen Sie die Gleichung $v' = \frac{v^2}{x}$, $x > 0$, $v(1) = \frac{1}{3}$.

5. Aufgabe

6 Punkte

Es sei f eine Schwartzfunktion. Welche Bandbreite besitzt die Funktion

$$t \mapsto (\mathrm{si} * f)(t), \qquad \text{wobei } \mathrm{si}(t) = \begin{cases} \frac{\sin t}{t}, & t \neq 0 \\ 1, & t = 0 \end{cases} \qquad \text{ist?}$$

6. Aufgabe

6 Punkte

Finden Sie eine homogene lineare Differentialgleichung 4. Ordnung mit konstanten Koeffizienten, die sowohl te^{-t} als auch te^{t} als Lösungen hat!

7. Aufgabe

10 Punkte

Begründen oder widerlegen Sie

a) Ist $\{f_1, f_2\}$ ein Fundamentalsystem für eine gewöhnliche lineare homogene Differentialgleichung, so ist $\{f_1 + f_2, f_1 - f_2\}$ ebenfalls ein Fundamentalsystem für diese Differentialgleichung.

b) Schwartzfunktionen sind Laplace-transformierbar.

c) Die Ableitung einer Schwartzfunktion ist wieder eine Schwartzfunktion.

d) Die Laplacetransformierte einer periodischen Funktionen ist periodisch.

e) Eine Differentialgleichung der Gestalt $y''' + ay'' + by' + cy = t^2$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ hat immer ein Polynom vom Grad ≤ 3 als partikuläre Lösung.